Rešitve kolokvija in izpita iz teorije iger z dne 13. 6. 2011

FMF, Oddelek za matematiko – univerzitetni študij

1. Neposredno iz tabele razberemo, da so možna tudi čista Nasheva ravnovesja, pri katerih prvi igralec igra le A ali B, drugi pa le L ali M, in sicer je (B, L) čisto Nashevo ravnovesje, brž ko je $b \leq 5$, (A, M) pa je Nashevo ravnovesje, brž ko je $a \leq 2$.
Iz principa indiferentnosti dobimo, da kombinacij čisto–mešano ni, za mešano Nashevo ravnovesje oblike $\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & M \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right)$ pa mora veljati:

$$2 + 2q = 5 - 4q \geq b(1-q) \quad \text{in} \quad -1 + 6p = 2 - 3p \geq (1-p)a + 2p\,,$$

od koder dobimo, da je:

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L & M \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$

mešano Nashevo ravnovesje, če je $a \leq 1/2$ in $b \leq 6$.

Sklep: mešano Nashevo ravnovesje zahtevane oblike obstaja, brž ko je $a \leq 2$ ali $b \leq 5$, ne glede na c.

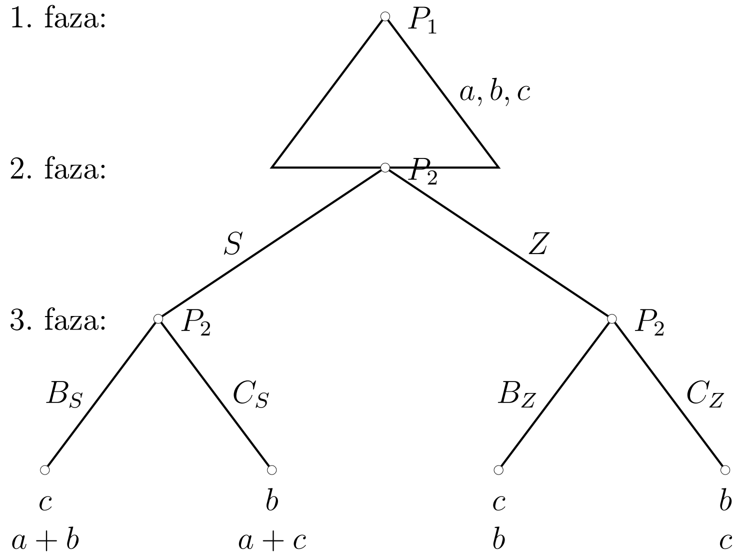
2. Najprej opazimo, da pri prvem igralcu, ki dobi signal stanja ω_1, akcija A dominira akcijo B, če dobi signal stanja ω_3, pa akcija B dominira akcijo A. Za prvega igralca s tema dvema signaloma je torej strategija jasna, za prvega igralca s signalom stanja ω_2 in drugega igralca pa dobimo strateško igro z naslednjima funkcijama koristnosti:

	L_{123}	D_{123}
A_2	$0, \frac{3}{2}$	$4, 3$
B_2	$3, 2$	$1, -1$

.

Iz tabele razberemo, da sta (A_2, D_{123}) in (B_2, L_{123}) čisti Bayesovi ravnovesji in da Bayesovih ravnovesij tipa čisto–mešano ni. Nadalje iz principa indiferentnosti razberemo, da je profil $\left(\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_{123} & D_{123} \\ 1-q & q \end{pmatrix}\right)$, kjer je $0 < p, q < 1$, mešano Bayesovo ravnovesje natanko tedaj, ko velja $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}p = 3 - 4p$ in $4q = 3 - 2q$, torej $p = \frac{1}{3}$ in $q = \frac{1}{2}$. Sklep: mešana Bayesova ravnovesja naše igre so $(A_1 A_2 B_3, D_{123})$, $(A_1 B_2 B_3, L_{123})$ in $\left(A_1 \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} B_3, \begin{pmatrix} L_{123} & D_{123} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$.

3. Gre za ekstenzivno igro, ki jo lahko ponazorimo z naslednjo sliko:



V tretji fazi vgnezdeno Nashevo ravnovesje nastopi, če drugi igralec igra B_S in B_Z, če je $b > c$, nadalje igra C_S in C_Z, če je $b < c$, in kar koli, če je $b = c$. Drugi igralec torej v drugi fazi, če ponujeni kos sprejme, dobi $a + \max\{b, c\}$, če pa ga zavrne, dobi $\max\{b, c\}$. V vgnezdenem Nashevem ravnovesju torej sprejme, če je $a > 0$, in sprejme ali zavrne, če je $a = 0$. Oglejmo si zdaj še prvo fazo. V vgnezdenem Nashevem ravnovesju prvi igralec ne glede na optimalno strategijo drugega igralca dobi $\min\{b, c\}$. To bo maksimalno, če bo $a = 0$ in $b = c = \frac{1}{2}$.

Sklep: v vgnezdenem Nashevem ravnovesju:

- prvi igralec razreže torto na kose velikosti 0, $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$;
- če prvi igralec ponudi drugemu kos velikosti več kot nič, ga drugi igralec sprejme, ničelni kos pa sprejme ali zavrne;
- drugi igralec zmakne večjega od preostalih kosov; če sta enaka, zmakne katerega koli.

4. Pripadajoči koeficienti so enaki:

$$
\begin{gathered}
c_\emptyset = 0\,, \quad c_{\{1\}} = 0\,, \quad c_{\{2\}} = 1\,, \quad c_{\{3\}} = 1\,, \\
c_{\{1,2\}} = 1\,, \quad c_{\{1,3\}} = 0\,, \quad c_{\{2,3\}} = 0\,, \quad c_{\{1,2,3\}} = a - 3\,,
\end{gathered}
$$

Shapleyjeve vrednosti pa so:

$$
\phi_1 = \frac{a}{3} - \frac{1}{2}\,, \quad \phi_2 = \frac{a}{3} + \frac{1}{2}\,, \quad \phi_3 = \frac{a}{3}\,.
$$