Rešitve 1. obvezne domače naloge iz teorije iger

Matematika, 2013/14

1. a) Spomnimo se, da sta preferenčni funkciji igralcev enaki:

$$u_1(q_1, q_2) = (a - q_1 - q_2)_+ q_1 - c q_1 \,, \qquad u_2(q_1, q_2) = (a - q_1 - q_2)_+ q_2 - c q_2 \,.$$

Ključno opažanje naloge je, da je, če fiksiramo q_2, preferenčna funkcija u_1 prvega igralca strogo naraščajoča na $[0, (a - c - q_2)_+/2]$ in strogo padajoča na $[(a - c - q_2)_+/2, \infty)$. Analogno velja, če zamenjamo oba proizvajalca.
Torej je u_1 za vsak q strogo padajoča na $\left[\frac{a-c}{2}, \infty\right)$, kar pomeni, da so vse akcije prvega igralca iz $\left(\frac{a-c}{2}, \infty\right)$ strogo dominirane. Od preostalih nobena ni strogo dominirana, saj za $q_2 = a$ funkcija u_1 padajoča, za $q_2 = 0$ pa strogo naraščajoča na $\left[0, \frac{a-c}{2}\right]$.
b) Zdaj privzamemo, da je $q_1 \le \frac{a-c}{2}$. Od tod sledi, da je u_2 strogo naraščajoča na $\left[0, \frac{a-c}{4}\right]$ in strogo padajoča na $\left[\frac{a-c}{2}, \infty\right)$, kar pomeni, da so vse akcije $q_2 \in \left[0, \frac{a-c}{4}\right) \cup \left(\frac{a-c}{2}, \infty\right)$ strogo dominirane. Akcije iz intervala $\left[\frac{a-c}{4}, \frac{a-c}{2}\right]$ pa niso dominirane, saj je funkcija u_2 za $q_1 = 0$ na tem intervalu strogo naraščajoča, za $q_1 = \frac{a-c}{2}$ strogo padajoča.
Splošneje, naj bo $r \le q_1 \le s$. Tedaj je u_2 strogo naraščajoča na $[0, (a - c - s)_+/2]$ in strogo padajoča na $[(a - c - r)_+/2, \infty)$. Zato so vse akcije q_2 iz $[0, (a - c - s)_+/2) \cup ((a - c - r)_+/2, \infty)$ strogo dominirane. Akcije izven intervala $[(a - c - s)_+/2, (a - c - r)_+/2]$ pa niso strogo dominirane, saj je funkcija u_2 za $q_1 = r$ na tem intervalu strogo naraščajoča, za $q_1 = s$ pa strogo padajoča. Analogni sklepi veljajo tudi, če zamenjamo oba proizvajalca.
Z izločanjem strogo dominiranih akcij tako dobimo naslednje zaporedje iger:

$$
\begin{array}{ll}
q_1 \in \mathbb{R} \,, & q_2 \in \mathbb{R} \,, \\
q_1 \in \left[0, \frac{a-c}{2}\right] \,, & q_2 \in \mathbb{R} \,, \\
q_1 \in \left[0, \frac{a-c}{2}\right] \,, & q_2 \in \left[\frac{a-c}{4}, \frac{a-c}{2}\right] \,, \\
q_1 \in \left[\frac{a-c}{4}, \frac{3(a-c)}{8}\right] \,, & q_2 \in \left[\frac{a-c}{4}, \frac{a-c}{2}\right] \,, \\
q_1 \in \left[\frac{a-c}{4}, \frac{3(a-c)}{8}\right] \,, & q_2 \in \left[\frac{3(a-c)}{8}, \frac{5(a-c)}{16}\right] \,, \\
 & \vdots
\end{array}
$$

Če induktivno konstruiramo zaporedje $b_0, b_1, b_2, \ldots$ po predpisu $b_0 = 0$, $b_{n+1} = (a - c - b_n)/2$, opazimo, da po n-ti zožitvi igre ($n \ge 2$) dobimo naslednje:

- če je n sod: $q_1 \in [b_{n-2}, b_{n-1}]$, $q_2 \in [b_n, b_{n-1}]$;
- če je n lih: $q_1 \in [b_{n-1}, b_n]$, $q_2 \in [b_{n-1}, b_{n-2}]$.

Ker je funkcija $x \mapsto (a-c-x)/2$ skrčitev, je zaporedje $b_0, b_1, \ldots$ konvergentno, limita pa je rešitev enačbe $x = (a-c-x)/2$, torej $x = (a-c)/3$. To pomeni, da je profil $q_1 = q_2 = (a-c)/3$ edini, ki je lahko v preseku vseh zoženih iger (in dejansko je, ker je $b_n < (a-c)/3$, če je n sod, in $b_n > (a-c)/3$, če je n lih). Ta profil je torej edini, ki je lahko Nashevo ravnovesje igre, in dejansko tudi je *strogo* Nashevo ravnovesje: če kateri koli od igralcev zamenja akcijo $(a-c)/3$ s katero drugo, obstaja zožitev, v kateri je nova akcija strogo dominirana, torej se igralcu tovrstna menjava strogo ne splača.

2. Naj bo g število avtomobilov, ki se peljejo po zgornji, d pa število avtomobilov, ki se peljejo po spodnji trasi ($4000 - g - d$ pa jih uporabi navpično povezavo). Pogoji za Nashevo ravnovesje so naslednji:

- Za $g \geq 1$ je $\frac{4000-d}{100} + 45 \leq 45 + \frac{4000-(g-1)}{100}$ in $\frac{4000-d}{100} + 45 \leq \frac{4000-d}{100} + b + \frac{4000-(g-1)}{100}$, torej $g \leq d + 1$ in $g \leq 100b - 499$.
- Za $d \geq 1$ je $\frac{4000-g}{100} + 45 \leq 45 + \frac{4000-(d-1)}{100}$ in $\frac{4000-g}{100} + 45 \leq \frac{4000-g}{100} + b + \frac{4000-(d-1)}{100}$, torej $g \leq d + 1$ in $d \leq 100b - 499$.
- Za $g + d \leq 3999$ je $\frac{4000-d}{100} + b + \frac{4000-g}{100} \leq \frac{4000-d}{100} + 45$ in $\frac{4000-g}{100} + b + \frac{4000-d}{100} \leq \frac{4000-g}{100} + 45$, torej $g \geq 100b - 500$ in $d \geq 100b - 500$.

Od tod sledi:

- $|g - d| \leq 1$. To pomeni, da je, če je $g + d$ sodo število, $g = d$, sicer pa je $|g - d| = 1$.
- Če je $g + d = 4000$, je $g = d = 2000$ in $b \geq 24{\cdot}99$.
- Če je $g + d \leq 3999$, je $b \leq 24.995$.

Zdaj pa ločimo naslednje možnosti glede na b.

1. $b > 24{\cdot}995$. V tem primeru je edino Nashevo ravnovesje $g = d = 2000$, potovalni čas vseh vozil je 65.
2. $24{\cdot}99 < b \leq 24{\cdot}995$. Načeloma imamo dve možnosti: $g = d = 2000$ ali $g + d \leq 3999$, $100b - 500 \leq g, d \leq 100b - 499$. Toda druga možnost odpade, saj dobimo $g, d > 1999$.
3. $5 \leq b \leq 24{\cdot}99$. Sledi $100b - 500 \leq g, d \leq 100b - 499$. Če je $100b$ celo število, dobimo štiri možnosti:
   a) $g = d = 100b - 500$. Potovalni čas vseh vozil je $90 - b$.
   b) $g = 100b - 499, d = 100b - 500$. Potovalni čas vozil, ki potujejo po zgornji trasi, je $90 - b$, potovalni čas vozil, ki potujejo po spodnji trasi ali uporabijo navpično povezavo, pa je $89{\cdot}99 - b$.
   c) $g = 100b - 500, d = 100b - 499$. Potovalni čas vozil, ki potujejo po spodnji trasi, je $90 - b$, potovalni čas vozil, ki potujejo po zgornji trasi ali uporabijo navpično povezavo, pa je $89{\cdot}99 - b$.
   d) $g = d = 100b - 499$. Potovalni čas vozil, ki potujejo po zgornji ali spodnji trasi, je $89{\cdot}99 - b$, potovalni čas vozil, ki uporabijo navpično povezavo, pa

je $89{\cdot}98 - b$.

Če pa $100b$ ni celo število, je edino Nashevo ravnovesje $g = d = 100b' - 500$, kjer je b' edino število med b in $b + 1/100$, za katerega je $100b'$ celo število. Potovalni čas vozil, ki uberejo zgornjo ali spodnjo traso, je $90 - b'$, potovalni čas vozil, ki uporabijo navpično povezavo, pa je $90 - b' - (b' - b)$.

4. $b < 5$. V tem primeru je $g = d = 0$ in potovalni čas vseh vozil je $80 + b$.

Za $b = 10$ torej dobimo Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko se po zgornji trasi pelje 500 ali 501 vozilo, prav tako pa tudi po spodnji trasi (neodvisno od zgornje). Natanko pri $b < 5$ pa je edino Nashevo ravnovesje profil, pri katerem vsi vozniki uporabijo navpično povezavo.

3. Vsako pleme ima dve akciji: B (gre v boj) ali N (ne gre v boj). Koristnostne funkcije so enake:

$$u_i(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 0 & ; \ a_1 = a_2 = a_3 = N \\ \left(\frac{3 - \mathbf{1}(a_1 = B) - \mathbf{1}(a_2 = B) - \mathbf{1}(a_3 = B)}{\mathbf{1}(a_1 = B) + \mathbf{1}(a_2 = B) + \mathbf{1}(a_3 = B)} - 1\right) \mathbf{1}(a_i = B) & ; \ \text{sicer} \end{cases}$$

Oglejmo si zdaj profil, pri katerem gre vsako pleme v boj z verjetnostjo p. Za $p = 0$ izračunamo:

$$u_1(N, N, N) = 0\,, \qquad u_1(B, N, N) = 1\,,$$

torej tak profil ni Nashevo ravnovesje. Podobno za $p = 1$ izračunamo:

$$u_1(B, B, B) = -1\,, \qquad u_1(N, B, B) = 0$$

in tudi to ni Nashevo ravnovesje. Za $0 < p < 1$ pa mora veljati princip indiferentnosti – vrednosti:

$$\begin{aligned} &u_1\left(N, \begin{pmatrix} N & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \text{in} \\ &u_1\left(B, \begin{pmatrix} N & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N & B \\ 1-p & p \end{pmatrix}\right) = (1-p)^2 \cdot 1 + 2p(1-p) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + p^2 \cdot (-1) = \\ &\qquad = p^2 - 3p + 1 \end{aligned}$$

morata biti enaki, to pa je res za $p = \left(3 - \sqrt{5}\right)/2 \doteq 0{\cdot}382$. To je edino mešano Nashevo ravnovesje.