Rešitve 2. obvezne domače naloge iz teorije iger

Matematika, 2013/14

1. Najprej opazimo, da je druga vrstica dominirana s kombinacijo 1/6 prve in 5/6 tretje. Nadaljnjih dominacij ni, zato pogledamo, ali obstaja Nashevo ravnovesje, pri katerem velja princip indiferentnosti za vse akcije. Nastavimo:

$$\begin{bmatrix}1-b-c, & b, & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 14\\ 7 & 6 & 2\\ 6 & 7 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \alpha & \alpha\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 14\\ 7 & 6 & 2\\ 6 & 7 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-y-z\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\ \beta\\ \beta\end{bmatrix}$$

ter dobimo $b = 1/4$, $c = 1/2$, $y = 1/3$, $z = 1/3$ in $\alpha = \beta = 5$. Slednje je torej vrednost igre. Ker je rešitev enolična, je edino mešano Nashevo ravnovesje:

$$\left(\left(\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right), \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right).$$

2. Najprej je na potezi Herbert, čigar akcije so urejene trojice (h_1, h_2, h_3) – glede na to, koliko zlatnikov je dal posameznemu svetovalcu. Nato je na potezi Kaspar, čigar akcije naj bodo urejene trojice (k_1, k_2, k_3).
Naj bo H število svetovalcev, ki so so Herberta dobili strogo več kot od Kasparja. Nadalje naj bo K število svetovalcev, ki so od Kasparja dobili strogo več kot od Herberta. Velja $H + K \leq 3$: preostanek je število svetovalcev, ki so od obeh dobili enako.
Označimo z u_H Herbertovo, z u_K pa Kasparjevo koristnostno funkcijo. Njune vrednosti so prikazane v naslednji tabeli:

Možnost	Kdo dobi posel	u_H	u_K
$H \geq K+2$	Herman	$5-h_1-h_2-h_3$	$-k_1-k_2-k_3$
$H=2, K=1$	Herman	$5-h_1-h_2-h_3$	$-k_1-k_2-k_3$
$H=1, K=0$	Herman z verjetnostjo $\frac{3}{4}$, Kaspar z verjetnostjo $\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}-h_1-h_2-h_3$	$\frac{5}{4}-k_1-k_2-k_3$
$H=K$	vsak z verjetnostjo 1/2	$\frac{5}{2}-h_1-h_2-h_3$	$\frac{5}{2}-k_1-k_2-k_3$
$H=0, K=1$	Herman z verjetnostjo $\frac{1}{4}$, Kaspar z verjetnostjo $\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}-h_1-h_2-h_3$	$\frac{15}{4}-k_1-k_2-k_3$
$H=1, K=2$	Kaspar	$-h_1-h_2-h_3$	$5-k_1-k_2-k_3$
$H \leq K-2$	Kaspar	$-h_1-h_2-h_3$	$5-k_1-k_2-k_3$

Najprej si moramo ogledati, kaj se pri Herbertovi akciji (h_1, h_2, h_3) najbolj splača narediti Kasparju. Opazimo, da ne more veljati $0 < k_i < h_i$, saj se v tem primeru Kasparju strogo bolj splača i-temu svetovalcu nič dati. Nadalje ne more veljati $k_i > h_i + 1$, saj se v tem primeru Kasparju strogo bolj splača i-temu svetovalcu dati $h_i + 1$. A tudi primer $k_i = h_i \neq 0$ je izključen: podrobnosti so v naslednji tabeli (s črtico, torej H', K', u'_K, so označene ustrezne količine po spremembi):

H	K	u_K	k'_i	H'	K'	u'_K
2	0	$-k_1 - k_2 - k_3$	0	3	0	$-k'_1 - k'_2 - k'_3 = u_K + k_i$
1	0	$\frac{5}{4} - k_1 - k_2 - k_3$	$k_i + 1$	1	1	$\frac{5}{2} - k'_1 - k'_2 = k'_2 = \frac{3}{2} - k_1 - k_2 - k_3$
0	0	$\frac{5}{2} - k_1 - k_2 - k_3$	$k_i + 1$	0	1	$\frac{15}{4} - k'_1 - k'_2 - k'_3 = \frac{11}{4} - k_1 - k_2 - k_3$
1	1	$\frac{5}{2} - k_1 - k_2 - k_3$	$k_i + 1$	1	2	$5 - k'_1 - k'_2 - k'_3 = 4 - k_1 - k_2 - k_3$
0	1	$\frac{15}{4} - k_1 - k_2 - k_3$	$k_i + 1$	0	2	$5 - k'_1 - k'_2 - k'_3 = 4 - k_1 - k_2 - k_3$
0	2	$5 - k_1 - k_2 - k_3$	0	1	2	$5 - k'_1 - k'_2 - k'_3 = u_K + k_i$

Torej mora za vsak i veljati bodisi $k_i = 0$ bodisi $k_i = h_i + 1$ (Kaspar svetovalca ne podkupi ali pa podkupi). Ni težko preveriti naslednje:

- Če Herbert ne podkupi nobenega svetovalca, se Kasparju najbolj splača z enim zlatnikom podkupiti dva od treh svetovalcev. V tem primeru Herbert dobi 0.
- Če Herbert podkupi natanko enega svetovalca, se Kasparju najbolj splača z enim zlatnikom podkupiti preostala dva svetovalca. V tem primeru je Herbert v minusu.
- Če Herbert podkupi natanko dva svetovalca in je m manjši znesek, ki ga da svetovalcu, ločimo tri podmnožnosti:
  - Pri $m < 3$ se Kasparju najbolj splača podkupiti še nepodkupljenega svetovalca (z enim zlatnikom) in tistega, ki dobi manjšo podkupnino (z $m + 1$ zlatniki). V tem primeru je Herbert v minusu.
  - Pri $m > 3$ se Kasparju na splača podkupiti nikogar. Herbert je spet v minusu, saj dobi $5 - 2m$ ali manj.
  - Pri $m = 3$ pa je Kaspar indiferenten med prejšnjima dvema možnostma. Pri obeh je Herbert v minusu.
- Če Herbert podkupi vse tri svetovalce z zneski $m \leq s \leq M$, spet ločimo tri možnosti:
  - Pri $m + s < 3$ se Kasparju najbolj splača podkupiti tista dva, ki dobita manj, torej m in s (z $m + 1$ in $s + 1$ zlatniki). V tem primeru je Herbert v minusu.
  - Pri $m + s > 3$ se Kasparju ne splača podkupiti nikogar. Spet je Herbert v minusu, saj je bodisi $m = s = 2$ in Herbert dobi $5 - m - s - M \leq 5 - 2 - 2 - 2 = -1$, bodisi je $s \geq 3$ in Herbert dobi $5 - m - s - M \leq 5 - 1 - 3 - 3 = -2$.

– Pri $m+s=3$ pa je Kaspar indiferenten med prejšnjima dvema možnostma. To je možno le, če je $m=1$ in $s=2$, se pravi, da Herbert dobi $5-1-2-M \leq 5-1-2-3 \leq 0$.

Kasparjeva strategija je sestavljena iz vseh možnih kombinacij, ki zadostujejo zgornjemu opisu: Za vsako Herbertovo strategijo (h_1, h_2, h_3) ima lahko Kaspar eno ali več možnosti. V slednjem primeru bomo rekli, da je *konservativen* do Herbertove strategije (h_1, h_2, h_3), če ne podkupi nikogar, in *aktiven*, če ustrezno podkupi. Vgnezdena Nasheva ravnovesja so naslednja:

- Herbert ne podkupi nikogar, Kaspar pa ubere katero koli od prej omenjenih strategij (torej se zgodi, da izbere dva izmed treh svetovalcev in ju podkupi s po enim zlatnikom).
- Herbert enega svetovalca podkupi z enim zlatnikom, preostala dva pa s po dvema zlatnikoma, in Kaspar je do te Herbertove strategije konservativen (do ostalih pa lahko kar koli).

3. Če prvi igralec igra proti drugima dvema, igra igro (prikazani so le njegovi dobitki):

	T_2T_3	T_2B_3	B_2T_3	B_2B_3
T_1	3	4	1	0
B_1	8	5	2	1

in vrednost te igre je 1. Drugi igralec proti prvemu in tretjemu igra igro:

	T_1T_3	T_1B_3	B_1T_3	B_1B_3
T_2	4	0	1	1
B_2	3	1	0	2

in njena vrednost je 1/2. Tretji igralec proti prvima dvema igra igro:

	T_2T_3	T_2B_3	B_2T_3	B_2B_3
T_3	4	3	4	6
B_3	5	6	3	5

in njena vrednost je 15/4. Če se prvi in drugi igralec združita v koalicijo proti tretjemu, igrata igro:

	T_3	B_3
T_1T_2	7	4
T_1B_2	4	1
B_1T_2	9	6
B_1B_2	2	3

,

katere vrednost je 6. Če se prvi in tretji igralec združita v koalicijo proti drugemu, igrata igro:

	T_2	B_2
T_1T_3	7	4
T_1B_3	9	6
B_1T_3	12	8
B_1B_3	8	6

,

katere vrednost je 8. Če pa se drugi in tretji igralec združita v koalicijo proti prvemu, igrata igro:

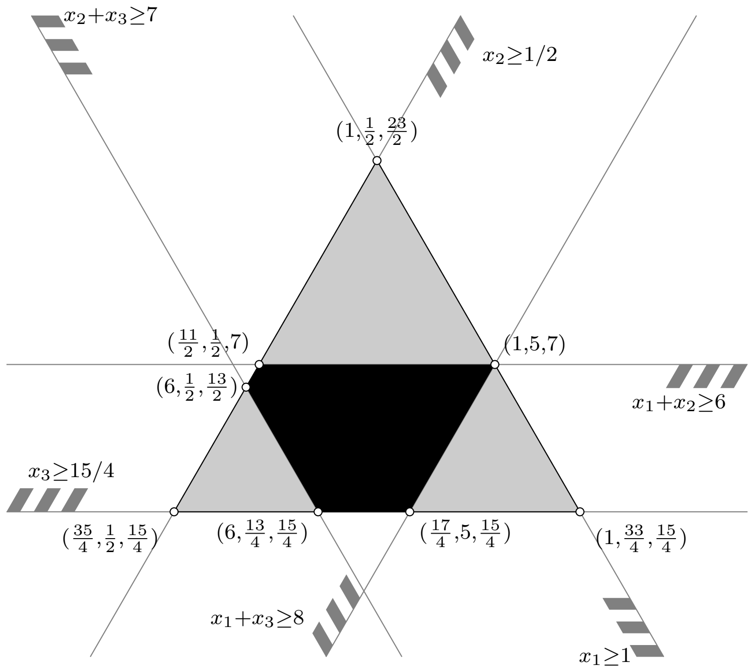
	T_1	B_1
T_2T_3	8	5
T_2B_3	5	4
B_2T_3	6	6
B_2B_3	7	7

,

katere vrednost je 7. Končno, če se vsi trije združijo v koalicijo, si lahko zagotovijo največji skupni dobitek, ki znaša 13. Koalicijska oblika igre je torej:

$$v(\{1\}) = 1\,, \qquad v(\{2\}) = \frac{1}{2}\,, \qquad v(\{3\}) = \frac{15}{4}\,,$$
$$v(\{1,2\}) = 6\,, \qquad v(\{1,3\}) = 8\,, \qquad v(\{2,3\}) = 7\,,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 13\,.$$

Imputacije tvorijo trikotnik z oglišči $(35/4, 1/2, 15/4)$, $(1, 33/4, 15/4)$ in $(1, 1/2, 23/2)$. Jedro je petkotnik z oglišči $(1, 5, 7)$, $(11/2, 1/2, 7)$, $(6, 1/2, 13/2)$, $(6, 13/4, 15/4)$ in $(17/4, 5, 15/4)$. Slika:



Za izračun Shapleyjevih vrednosti tabelirajmo prispevke posameznikov h koaliciji za vse možne vrstne rede pristopanja:

Vrstni red	1	2	3
$1, 2, 3$	1	5	7
$1, 3, 2$	1	5	7
$2, 1, 3$	$11/2$	$1/2$	7
$2, 3, 1$	6	$1/2$	$13/2$
$3, 1, 2$	$17/4$	5	$15/4$
$3, 2, 1$	6	$13/4$	$15/4$
Povprečje	$95/24$	$77/24$	$35/6$

Shapleyjeve vrednosti so torej $\phi_1 = 95/24$, $\phi_2 = 77/24$, $\phi_3 = 35/6$.