DODATEK K VAJAM IZ TEORIJE IGER

UL FMF, Matematika – univerzitetni študij

22. 1. 2014

Igre v koalicijski obliki

Koalicijska igra na množici igralcev I je določena s predpisom, ki pove, koliko vsaka podmnožica igralcev $K \subseteq I$ skupaj dobi, če sklene koalicijo. To je torej preslikava v iz potenčne množice množice K v $\mathbb{R}$. Pravimo ji **karakteristična funkcija**. *Pri tem mora veljati $v(\emptyset) = 0$ in še* **superaditivnost**: *če sta K in L disjunktni koaliciji, mora veljati $v(K \cup L) \geq v(K) + v(L)$.*
Vsaka strateška igra porodi koalicijsko, in sicer tako, da je $v(K)$ stopnja varnosti za koalicijo K v izvirni strateški igri. Z drugimi besedami, to je vrednost matrične igre, ki jo dobimo, če koalicija K igra proti svoji protikoaliciji $I \setminus K$, pri čemer lahko obe koaliciji poljubno kombinirata svoje akcije, koristnostna funkcija koalicije pa je enaka vsoti koristnostnih funkcij vseh njenih članov.
Zaradi superaditivnosti je globalno gledano vedno najboljša polna koalicija. Ključni problem pa je, kako naj si njeni člani razdelijo skupni dobitek. Če je $I = \{1, 2, \ldots n\}$, lahko delitev dobitka predstavimo z n-terico $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, za katero velja $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = v(I)$.
Imputacije *so tiste delitve, za katere je $x_i \geq v(\{i\})$ za vse i (torej nihče ne more profitirati, če sam izstopi iz koalicije). Zaradi superaditivnosti je množica imputacij vedno neprazna.*
Jedro *sestavljajo tiste delitve, za katere je $\sum_{i \in K} x_k \geq v(K)$ za vse koalicije K (torej nobena koalicija ne more profitirati, če spodkoplje polno koalicijo). Jedro je lahko tudi prazno.*

1. Pretvorite igro:

	T_2	B_2
T_1	$-1, 0, 0$	$0, 1, 0$
B_1	$0, 0, 1$	$1, 0, 0$

$a_3 = T_3$

	T_2	B_2
T_1	$1, 0, 1$	$0, 0, 0$
B_1	$0, 0, -1$	$0, 1, 0$

$a_3 = B_3$.

v koalicijsko obliko ter določite imputacije in jedro.

Shapleyjeve vrednosti

Shapleyjeva vrednost ϕ_i *je povprečni prispevek i-tega igralca h koaliciji, če si predstavljamo, da igralci pristopajo h koaliciji zaporedoma, drug za drugim. Pri tem vzamemo vse možne vrstne rede pristopanja. Če torej igralci pristopajo v vrstnem redu $\pi(1), \pi(2), \ldots \pi(n)$ in je $i = \pi(l)$, je prispevek i-tega igralca enak $v(\{\pi(1), \ldots \pi(l)\}) - v(\{\pi(1), \ldots \pi(l-1)\})$.*

Shapleyjeve vrednosti so edina preslikava $v \mapsto (\phi_1(v), \ldots \phi_n(v))$, ki zadošča naslednjim aksiomom:

- **Učinkovitost**: $\sum_{i \in I} \phi_i(v) = v(I)$.
- **Simetrija**: brž ko za vse koalicije K, ki ne vsebujejo i in j, velja $v(K \cup \{i\}) = v(K \cup \{j\})$, je $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.
- **Neopaznost**: brž ko za vse koalicije K, ki ne vsebujejo i, velja $v(K \cup \{i\}) = v(K)$, je $\phi_i(v) = 0$.
- **Aditivnost**: za poljubni karakteristični funkciji u in v velja $\phi_i(u + v) = \phi_i(u) + \phi_i(v)$ za vse $i \in I$.

Glej Thomas S. Ferguson: *Game Theory.*

2. Določite imputacije, jedro in Shapleyjeve vrednosti koalicijske igre s karakteristično funkcijo:

$$v(\{1\}) = 2\,, \qquad v(\{2\}) = 1\,, \qquad v(\{3\}) = 2\,,$$
$$v(\{1,2\}) = 8\,, \qquad v(\{1,3\}) = 9\,, \qquad v(\{2,3\}) = 8\,,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 12\,.$$

3. Kmet Ambrož ima odsluženega vola, ki je le še za zakol. V vasi sta dva mesarja, Boris in Cveto. Boris lahko od vola iztrži 90, Cveto pa 120 denarnih enot dobička. Glede na to, da Cveto iztrži več, je, če gledamo skupni dobiček, najbolj smiselno, da vola dobi on. A za koliko naj mu ga Ambrož proda? Si tudi Boris zasluži del dobička v zameno za izgubljeni posel?

   Modelirajte to kot koalicijsko igro ter na zgornji dve vprašanji odgovorite s stališča jedra in s stališča Shapleyjevih vrednosti.

4. Dokažite, da se Nasheva rešitev Nashevega modela pogajanja, ki izhaja iz strateške igre za dva igralca ter ima prenosljivo dobrino in izhodišče, kjer igralca sprva ne predvidevata sporazuma, ujema s Shapleyjevima vrednostma pripadajoče koalicijske igre.

5. Dokažite, da so Shapleyjeve vrednosti imputacija.

6. Komisija ima 4 člane, eden izmed njih je predsednik. Pri sprejemanju sklepov, kjer glasujejo, velja, da je sklep sprejet, če zanj glasujejo vsaj trije člani ali pa predsednik in še en član komisije.

   Recimo, da ima komisija od nekega sprejetega sklepa korist, ki si jo razdelijo le tisti, ki so glasovali zanj (t. j. $v(S) = 1$, če je sklep sprejet, če člani koalicije S glasujejo za, ostali pa proti). Poiščite Shapleyjeve vrednosti posameznih članov te komisije.

   Posplošite še na komisijo iz $2n$ članov.

REŠITVE

1. Če prvi igralec igra proti drugima dvema, igra igro (prikazani so le njegovi dobitki):

	T_2T_3	T_2B_3	B_2T_3	B_2B_3
T_1	-1	1	0	0
B_1	0	0	1	0

in vrednost te igre je 0. Drugi igralec proti prvemu in tretjemu igra igro:

	T_1T_3	T_1B_3	B_1T_3	B_1B_3
T_2	0	0	0	0
B_2	1	0	0	1

in njena vrednost je 0. Tretji igralec proti prvima dvema igra igro:

	T_2T_3	T_2B_3	B_2T_3	B_2B_3
T_3	0	0	1	0
B_3	1	0	-1	0

in njena vrednost je prav tako 0. Če se prvi in drugi igralec združita v koalicijo proti tretjemu, igrata igro:

	T_3	B_3
T_1T_2	-1	1
T_1B_2	1	0
B_1T_2	0	0
B_1B_2	1	1

,

katere vrednost je 1. Če se prvi in tretji igralec združita v koalicijo proti drugemu, igrata igro:

	T_2	B_2
T_1T_3	-1	0
T_1B_3	2	0
B_1T_3	1	1
B_1B_3	-1	0

,

katere vrednost je prav tako 1. Če pa se drugi in tretji igralec združita v koalicijo proti prvemu, igrata igro:

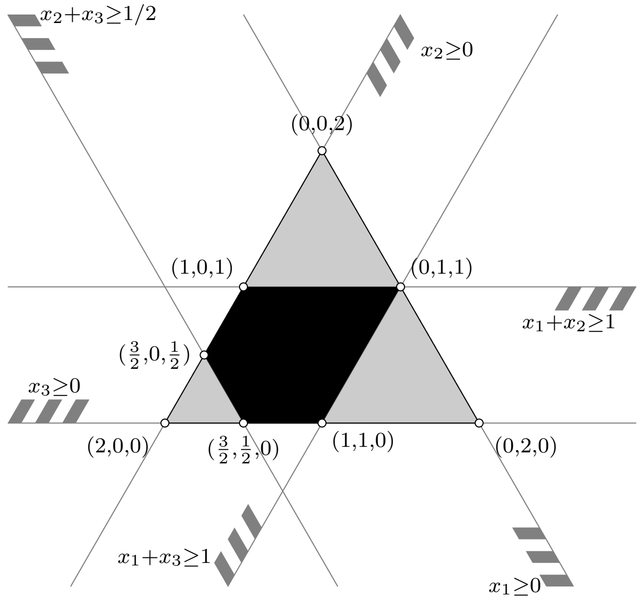
	T_1	B_1
T_2T_3	0	1
T_2B_3	1	-1
B_2T_3	1	0
B_2B_3	0	1

,

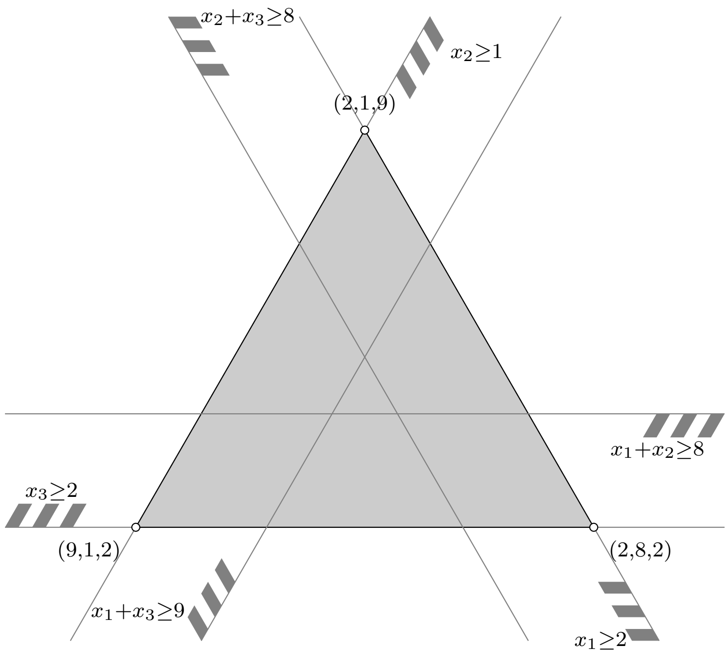
katere vrednost je 1/2. Končno, če se vsi trije združijo v koalicijo, si lahko zagotovijo največji skupni dobitek, ki znaša 2. Koalicijska oblika igre je torej:

$$v(\{1\}) = 0\,, \qquad v(\{2\}) = 0\,, \qquad v(\{3\}) = 0\,,$$
$$v(\{1,2\}) = 1\,, \qquad v(\{1,3\}) = 1\,, \qquad v(\{2,3\}) = \frac{1}{2}\,,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 2\,.$$

Imputacije tvorijo trikotnik z oglišči $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ in $(0,0,2)$.
Jedro je petkotnik z oglišči $(3/2,1/2,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ in $(3/2,0,1/2)$.
Slika:



2. Imputacije tvorijo trikotnik z oglišči $(9,1,2)$, $(2,8,2)$ in $(2,1,9)$.
Jedro je prazno: iz $x_1+x_2 \geq 8$, $x_1+x_3 \geq 9$ in $x_2+x_3 \geq 8$ sledi $x_3 \leq 4$, $x_2 \leq 3$ in $x_1 \leq 4$, kar pomeni, da mora biti $x_1+x_2+x_3 \leq 11$. Slika:



Za izračun Shapleyjevih vrednosti tabelirajmo prispevke posameznikov h koaliciji za vse možne vrstne rede pristopanja:

Vrstni red	1	2	3
$1, 2, 3$	2	6	4
$1, 3, 2$	2	3	7
$2, 1, 3$	7	1	4
$2, 3, 1$	4	1	7
$3, 1, 2$	7	3	2
$3, 2, 1$	4	6	2
Povprečje	13/3	10/3	13/3

Shapleyjeve vrednosti so torej $\phi_1 = 13/3$, $\phi_2 = 10/3$, $\phi_3 = 13/3$.

3. Če koalicija vsebuje Ambroža in še vsaj enega mesarja, dobi toliko, kolikor največ iztrži mesar, ki je v koaliciji. Sicer koalicija ne dobi ničesar. Torej velja:

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = v(\{B, C\}) = 0\,,$$
$$v(\{A, B\}) = 90\,, \qquad v(\{A, C\}) = v(\{A, B, C\}) = 120\,.$$

Pri delitvi dobička, ki je v jedru, Boris ne sme dobiti ničesar, sicer bi lahko Ambrož in Cveto izstopila iz velike koalicije in bi dobila več (100 denarnih enot). Toda Borisova prisotnost pomeni, da Cveto ne sme dobiti več kot 10 denarnih enot. V nasprotnem primeru bi namreč lahko Ambrož in Boris izstopila iz velike koalicije in bi dobila več (90 denarnih enot). Drugi izstopi iz koalicije pa pomenijo le, da na koncu nihče ne sme biti v minusu, saj je izkupiček drugih koalicij enak nič (ni pa negativen). Skratka, jedro predstavljajo natanko koalicije, pri katerih Ambrož dobi a, Boris nič, Cveto pa $100 - a$, kjer je $90 \le a \le 100$.

Za izračun Shapleyjevih vrednosti tabelirajmo prispevke posameznikov h koaliciji za vse možne vrstne rede pristopanja:

Vrstni red	A	B	C
A, B, C	0	90	30
A, C, B	0	0	120
B, A, C	90	0	30
B, C, A	120	0	0
C, A, B	120	0	0
C, B, A	120	0	0
Povprečje	75	15	30

Shapleyjeve vrednosti so torej $\phi_A = 75$, $\phi_B = 15$ in $\phi_3 = 30$, se pravi, da mora tudi Boris dobiti nekaj denarja.

4. Dani Nashev model pogajanja ima izhodišče $\big(v(\{1\}), v(\{2\})\big)$, maksimalni možni dobitek pa je enak $v(\{1,2\})$. Nasheva rešitev pogajanja torej znaša:

$$\left(\frac{v(\{1,2\}) + v(\{1\}) - v(\{2\})}{2}, \frac{v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\})}{2}\right)$$

Za izračun Shapleyjevih vrednosti pa spet tabelirajmo prispevka obeh igralcev h koaliciji za oba možna vrstna reda pristopanja:

Vrstni red	1	2
$1, 2$	$v(\{1\})$	$v(\{1,2\}) - v(\{1\})$
$2, 1$	$v(\{1,2\}) - v(\{2\})$	$v(\{2\})$
Povprečje	$\frac{v(\{1,2\})+v(\{1\})-v(\{2\})}{2}$	$\frac{v(\{1,2\})-v(\{1\})+v(\{2\})}{2}$

Dobimo isto kot prej.

5. Zaradi superaditivnosti posamezen igralec pri *vsakem* vrstnem redu pristopanja h koaliciji prispeva vsaj toliko, kolikor dobi, če je sam.

6. Shapleyjeva vrednost posameznega člana komisije je tukaj kar verjetnost, da ta član odločilno prispeva k sprejetju odločitve, če glasujejo v na slepo izbranem vrstnem redu. Predsednik odločilno prispeva, če je na n-tem ali $(n+1)$-tem mestu, torej ima Shapleyjevo vrednost $1/n$. Vsak drug član komisije pa odločilno prispeva, če je bodisi na n-tem mestu in predsednik pred njim bodisi na $(n+1)$-tem mestu in predsednik za njim. Njegova Shapleyjeva vrednost je $(n-1)/\big[n(2n-1)\big]$.