Andrej Čadež

Fizika Zvezd

v20100111

Kazalo

Poglavje 1

Enačbe zvezdne strukture

Mehansko in toplotno ravnovesje

Ogledali si bomo fizikalno stanje snovi v zvezdah. Večina zvezd (kot npr. naše Sonce) je velika masa plina, v kateri so temperature dokaj visoke. Zato lahko potekajo v notranjosti jedrske reakcije, ki vzdržujejo skoraj stacionarno stanje. Pri večini zvezd so spremembe v izsevu izredno majhne. Na Zemlji so odkrili fosile alg, ki so stari okrog 1 milijardo let. Take alge ne bi mogle obstajati, če bi se temperatura takrat razlikovala od sedanje za več kot 20 °C. Ta stacionarnost je še posebej presenetljiva, če vemo, da vesolje verjetno ni starejše od 10 ali 20 milijard let. Vidimo, da lahko stanje zvezd v precej dolgi dobi njihovega življenja smatramo kot stacionarno. Zato je smiselno začeti študij zvezd s študijem stacionarnega stanja. Razen očitne pomembnosti tega stanja za zvezde, pa opravičuje tako odločitev tudi dejstvo, da je matematično mnogo preprosteje obravnavati stacionarno stanje kot časovno odvisne pojave. Ponavadi pa si lahko privoščimo še eno poenostavitev in sicer zanemarimo vrtenje zvezde. To opravičimo z argumentom, da je centrifugalni pospešek zaradi vrtenja pogosto precej manjši od pospeška gravitacije.

Nevrteča se zvezda je v stacionarnem stanju gotovo krogelno simetrična. Takoj lahko zapišemo dva ravnovesna pogoja:

a) V mehanskem ravnovesju je tlak v zvezdi hidrostatični tlak in zato velja

$$dp(r) = -\rho(r)g(r)dr,$$

kjer je r radialna koordinata, ki jo merimo iz središča zvezde, $g(r)$ pa je pospešek prostega pada pri r. Iz Newtonovega gravitacijskega zakona

sledi:

$$\begin{aligned} g(r) &= GM(r)/r^2, \text{ kjer je} \\ M(r) &= \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 dr'. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pogoj za mehansko ravnovesje je torej:

$$\frac{dp}{dr} = -G\frac{M(r)\rho(r)}{r^2}. \tag{1.2}$$

b) Energijski zakon pove za stacionarno stanje tole: tok energije $L(r+dr)$, ki odhaja skozi lupino z radijem $r+dr$ je enak toku $L(r)$, ki prihaja skozi lupino z radijem r in energiji, ki se proizvede na enoto časa v prostornini med obema lupinama. Torej:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dr} &= \varepsilon(r)\rho(r)4\pi r^2, \text{ oziroma} \\ L(r) &= \int_0^r \varepsilon(r')\rho(r')4\pi r'^2 dr, \end{aligned} \tag{1.3}$$

kjer je $\varepsilon(r)$ energija (jedrska energija), ki se proizvede na enoto mase in časa pri pogojih, ki vladajo na razdalji r od središča zvezde.

Iz teh enačb lahko dobimo ocene za rede velikosti nekaterih količin v zvezdah. Oceno za tlak v središču zvezde (p_c) dobimo iz enačbe za hidrostatično ravnovesje (1.2), če vstavimo namesto dp/dr kar p_c/R (R je radij zvezde), namesto gostote pa povprečno gostoto,

$$p_c \sim GRM\frac{\langle\rho\rangle}{R^2} = \frac{3G}{4\pi}\frac{M^2}{R^4}. \tag{1.4}$$

Če vstavimo podatke za Sonce: $R_\odot = 7\times10^8\,\mathrm{m}$, $M_\odot = 2\times10^{30}\,\mathrm{kg}$, ($G = 6.7\times10^{-8}\,\mathrm{cm^3/gs^2}$) in

$$\langle\rho\rangle = \frac{3M}{4\pi R^3} \sim 1\,\mathrm{g/cm^3},$$

dobimo

$$p_c \sim \frac{3}{4\pi}\frac{GM^2}{R^4} \sim 2.7\times10^9\,\mathrm{atm}.$$

Če vzamemo, da vzdržuje ta tlak idealni plin - ioniziran vodik + prosti elektroni (kasneje bomo videli, da je to zelo dobra aproksimacija), dobimo

iz plinske enačbe ($p = \rho kT/\bar{\mu}$) temperaturo globoko v notranjosti Sonca. Rezultat je:

$$kT = \bar{\mu}c^2 \frac{GM/c^2}{R}. \tag{1.5}$$

Za Sonce dobimo $T \sim 10^7\,\mathrm{K}$.

Relaksacijski časi

Iz pogoja za toplotno ravnovesje lahko izračunamo, koliko energije odda v povprečju vsak gram snovi na enoto časa:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{L_\odot}{M_\odot} \sim 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}/gs = 2 \times 10^{-18} \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{m_p s}}.$$

V drugem koraku smo izračunali, koliko energije se sprosti v povprečju na vsak proton v notranjosti Sonca v sekundi (m_p = masa protona). Vemo, da se pri zlitju protonov v He spremeni približno 8 odstotkov mase v energijo - na vsak proton pride okrog 8 MeV vezalne energije. Tako vidimo, da je povprečna življenjska doba protona v Soncu, oziroma **nuklearni relaksacijski čas** za Sonce:

$$t_N \sim \frac{1}{2 \times 10^{-18}} \frac{\mathrm{m_p s}}{\mathrm{MeV}} \times 8 \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{m_p}} \approx 10^{11}\,\text{let!} \tag{1.6}$$

Sedaj nam je jasno, zakaj se temperatura Sonca ni bistveno spremenila v zadnji milijardi let.

Ta preprost račun nam je pokazal, da zvezda lahko "živi" v stacionarnem stanju zelo dolgo. Odprto pa je ostalo še vprašanje, zakaj je stacionarno stanje stabilno - zakaj npr. zvezda ne eksplodira kot vodikova bomba. Nekaj o stabilnosti tega stanja izvemo, če se vprašamo, kakšne spremembe povzročijo slučajne motnje - to je odklon od hidrostatičnega ali od toplotnega ravnovesja.

Najprej si oglejmo primer, ko je hidrostatično ravnovesje v zvezdi porušeno, tako da se tlak in gostota v posameznih plasteh nekoliko razlikujeta od ravnovesnih vrednosti. Pričakujemo, da bodo zaradi tega plasti v zvezdi spreminjale svoje lege. Če se izkaže, da odkloni od mirovne lege ne naraščajo s časom, lahko smatramo, da je hidrostatično ravnovesje

stabilno, v obratnem primeru pa seveda ni.

Zaradi preprostosti bomo obravnavali radialne motnje. Opazujmo krogelno plast, ki je bila v ravnovesju omejena z radijem r in $r+dr$, v motenem stanju pa naj bosta radija mejnih plasti $R(r,t)$ in $R(r+dr,t)$. C sistemu, ki se giblje skupaj s plastjo, je vsota vseh sil na plast enaka nič. Zato je v sistemu izpolnjen pogoj hidrostatičnega ravnovesja:

$$dp = \rho \tilde{g} dR,$$

kjer je $\tilde{g}$ pospešek prostega pada v sistemu, ki se giblje skupaj s plastjo:

$$\tilde{g} = -\frac{GM(R)}{R^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}.$$

(Težo plasti v pospešenem sistemu izračunamo prav tako kot težo človeka v dvigalu, ki se pospešeno giblje.) Enačba gibanja za plast je torej:

$$\frac{\partial p(r,t)}{\partial r} = -\rho(r,t)\left[\frac{GM(r)}{R^2} + -\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\right]\frac{\partial R}{\partial r}. \tag{1.7}$$

Rešiti jo moramo za majhne odmike od stanja hidrostatičnega ravnovesja, zato vse količine razvijemo okrog tega stanja:

$$\begin{aligned} p(r,t) &= p_0(r) + \delta p(r,t) \\ \rho(r,t) &= \rho_0(r) + \delta\rho(r,t) \\ R(r,t) &= r(1+\alpha(r,t)), \end{aligned} \tag{1.8}$$

kjer indeks "0" označuje stanje hidrostatičnega ravnovesja. Ker smo se domenili, da $R(r,t)$ označuje vedno isto plast v zvezdi (za stalen r), velja, da je $M(R,t) = M(R)$ in zato tudi

$$dM = \rho_0(r) 4\pi r^2 dr = \rho(r,t) 4\pi R^2 dR.$$

Od tod dobimo naslednjo zvezo med $\delta\rho$ in α za majne α:

$$\delta\rho = -\rho_0(3\alpha + r\frac{\partial\alpha}{\partial r}).$$

Tudi med spremembami tlaka in gostote velja v prvem približku linearna zveza s stisljivostjo kot sorazmernostnim koeficientom. Kasneje se bo izkazalo, da moramo uporabiti adiabatsko stisljivost, ker so dinamični procesi v zvezdah mnogo hitrejši kot prenos toplote. Zato velja:

$$\frac{\delta p}{p} = \gamma\frac{\delta\rho}{\rho}, \tag{1.9}$$

kjer je γ razmerje specifičnih toplot (c_p/c_v). Za idealen enoatomni plin je $\gamma = 5/3$.

Iz enačb (1.8) eliminiramo δp in $\delta\rho$, jih vstavimo v enačbo gibanja (1.7), upoštevamo, da p_0 in ρ_0 ustrezata ravnovesni enačbi (1.2) in dobimo enačbo za majhne odmike od ravnovesne lege v obliki:

$$\frac{GM}{r^3}(3\gamma - 4)\alpha + \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\rho r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4 p\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right) = 0 \tag{1.10}$$

z robnimi pogoji α je ? končen v izhodišču in $\delta p = 0$ na površini zvezde. To enačbo smo navajeni reševati s separacijo spremenljivk - pišemo $\alpha = f(r)e^{i\omega t}$ in pridemo do problema lastnih vrednosti za frekvenco ω. Dobiti hočemo najnižjo lastno frekvenco - to je najdaljši čas, s katerim zvezda niha ali se seseda. Če vstavimo $GM/r^3 = 4\pi/3G\langle\rho\rangle$, kjer je $\langle\rho\rangle$ neka povprečna gostota, sta v enačbi (1.10) prva dva člena neodvisna od koordinate r in rešitev te enačbe, ki da dobro oceno za iskano najnižjo lastno frekvenco, je

$$\alpha = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}, \tag{1.11}$$

kjer je $\omega_0 = (4\pi/3G\langle\rho\rangle(3\gamma - 4))^{1/2}$. Če je $(3\gamma - 4) > 0$, je rešitev oscilirajoča, kar pomeni, da zvezda, ki je bila nekoč zmotena, radialno niha, amplituda nihanj pa s časom ne narašča. Bolj natančen model pokaže, da izgube energije zaradi prevajanja toplote v zvezdi nihanje počasi uduše (podobno kot pri zvoku v zraku). Vsaka motnja, ki nastane kjerkoli v zvezdi, se najkasneje v eni periodi tega osnovnega lastnega nihanja razširi po vsej zvezdi. Periodo tega nihanja imenujemo zato **dinamični relaksacijski čas** in je enak:

$$t_d = \left[\frac{G}{3\pi}\langle\rho\rangle(3\gamma - 4)\right]^{-1/2}. \tag{1.12}$$

Normalne zvezde, katerih notranjost je sestavljena iz idealnega plina, se res tako obnašajo, ker je adiabatski indeks γ za idealni plin enoatomni plin enak 5/3 in je torej $3\gamma - 4 = 1$, kar je pozitivno.

Če vstavimo podatke za Sonce, dobimo za dinamični relaksacijski čas

$$t_d \sim 1^{\mathrm{h}}.$$

Zanimivo je, da so časi tega velikostnega reda značilni za kefeide. Odtod sklepamo, da so to zvezde, ki radialno nihajo. Tako nihanje se včasih začne v fazi krčenja še preden zvezda doseže hidrostatično ravnovesje. Ko bi pogoji ravnovesja lahko bili izpolnjeni, pa še vedno odmeva začetni val, ki je krčenje ustavil. Krčenje pogosto odmeva nekaj milijonov let, ker nadomeščajo izgube pri nihanju nekateri mehanizmi, ki pa jih ob tem računu ne moremo pojasniti.

Normalne zvezde so dinamično stabilne, ker so sestavljene iz idealnega plina z $\gamma = 5/3$. Če pa je adiabatski indeks γ v zvezdi manjši ali enak $4/3$, je frekvenca ω v rešitvi imaginarna in rešitev za α je nestabilna, to je, α lahko narašča čez vse meje. Tudi ~~naj~~natačnejša teorija pokaže, da zvezda, v kateri pade γ na $4/3$ ali manj, ni stabilna - taka zvezda se neustavljivo krči ali pa razpenja (odvisno od začetnih pogojev). Med "normalnimi" zvezdami seveda ne najdemo takih nestabilnosti, nekatere posledice tovrstne nestabilnosti pa bomo kljub temu srečali pri nekaterih vprašanjih, ki jih bomo obravnavali v teh skriptah.

Ostane nam še vprašanje, kaj se zgodi, če se v zvezdi slučajno poruši toplotno ravnovesje. Videli bomo da je toplotno ravnovesje ponavadi stabilno. Čas, v katerem se porušeno ravnovesje zopet vzpostavi, pa imenujemo **termični relaksacijski čas**.

Natančnejša ocena termičnega relaksacijskega časa je lahko precej zahtevna in sedaj še ni teorije, s katero bi ga lahko določili. Grobo oceno dobimo tako, da se vprašamo, kako bi zvezda svetila, če bi vse jedrske reakcije naenkrat prenehale. Zato pa si oglejmo energijske zaloge zvezde.

Zvezda ima tri glavne energijske rezervoarje: jedrskega, toplotnega in gravitacijskega. O jedrskem smo že govorili in smo ugotovili, da ima dovolj energije, da lahko zvezdo, kot je Sonce, preskrbuje 100 milijard let. (Ta številka ne upošteva možnosti, da zvezda v neki fazi eksplodira in izgubi del mase ali pa, da jo s časom kontinuirano izgublja ter da na površini temperatura ni dovolj visoka, da bi reakcije sploh potekale.) Gravitacijsko energijo lahko napišemo takole:

$$E_G = \int_0^R -\frac{GM(r)\rho(r)}{r} 4\pi r^2 dr. \tag{1.13}$$

Če uporabimo enačbo hidrostatičnega ravnovesja

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2},$$

dobimo

$$E_G = \int_0^R r\frac{dp}{dr}4\pi r^2 dr$$

ali po integraciji per partes ($dv = \frac{dp}{dr}dr$, $u = 4\pi r^3$):

$$E_G = -12\pi \int_0^R pr^2 dr. \tag{1.14}$$

Toplotne energije po direktni poti v splošnem ne moremo izraziti tako preprosto. Spet se zatečemo k modelu idealnega plina. Tedaj je gostota notranje energije zvezdne snovi

$$w_n = n\frac{3}{2}kT,$$

kjer je n število delcev na enoto prostornine, in tudi

$$w_n = \frac{3}{2}p.$$

Torej je toplotna energija zvezde enaka:

$$E_T = \int_0^R \frac{3}{2}p4\pi r^2 dr = 6\pi \int_0^R pr^2 dr \tag{1.15}$$

oziroma

$$E_T = -\frac{1}{2}E_G. \tag{1.16}$$

Toplotna energija je enaka polovici negativne gravitacijske (vezavne) energije. Če se zvezda skrči, postane bolj vezana in toplotna energija se poveča za polovico prirastka negativne vezavne energije. Zvezda se segreje. Preostale polovice se mora zvezda znebiti, npr. s sevanjem. Četudi torej vse jedrske reakcije v zvezdi ugasnejo, bo še vedno sevala in se celo segrevala na račun gravitacijske energije, s tem da se bo krčila. Sedaj se lahko vprašamo, koliko časa bi sevalo Sonce z istim izsevom, če bi od začetka do danes izrabljalo samo gravitacijsko energijo. Vsa energija, ki bi jo Sonce

imelo na razpolago, je polovica njegove sedanje (negativne) gravitacijske energije. Ta energija pa bi zadoščala za:

$$t_T = \frac{-\frac{1}{2}E_{G\odot}}{L_\odot} \approx 3 \times 10^7 \,\text{let}. \tag{1.17}$$

Ta čas lahko smatramo za termični relaksacijski čas. Približno 30 milijonov let traja, da se porušeno toplotno ravnovesje zopet vzpostavi ali pa, da se toplotno ravnovesje poruši. Dolgost t_N daje zvezdi njeno toplotno stabilnost. Vsako krajšo nestabilnost v proizvodnji jedrske energije pa kompenzira toplotni rezervoar.

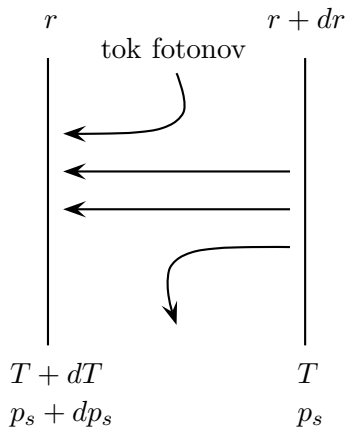
Zavedati se moramo, da je gornja ocena zelo groba, ker smo računali, kot da je zvezda v vsakem trenutku v stacionarnem stanju. To pa ni vedno dobra predpostavka. Če postane plin v zvezdi "mehak", tako da se γ zmanjša na 4/3 ali manj, postane zvezda nestabilna in takrat so procesi bistveno hitrejši. Naša ocena pa je prav dobra za povprečne zvezde kot je naše Sonce.

Do sedaj smo imeli opravka s tremi relaksacijskimi časi:

dinamičnim	t_d	$\sim 1^{\text{h}}$
toplotnim	t_T	$\sim 3 \times 10^7$ let
nuklearnim	t_N	$\sim 10^{11}$ let

Poudariti moramo bistveno različnost teh treh relaksacijskih časov. Ravno ta razlika v skali nam omogoča, da ločimo procese in iz opazovanj ugotavljamo, kateri proces v zvezdi dominira. Kot povsod so seveda tudi tu izjeme. V zvezdah, ki so na koncu svoje življenjske poti, so lahko procesi izredno hitri in vsi relaksacijski časi postanejo približno enaki.

Končno si moramo še ogledati, kako se prenaša energija v notranjosti zvezde. Izkaže se, da sta v večini primerov pomembna le da mehanizma - ali prevajanje s sevanjem ali pa s konvekcijo. Navadno prevajanje ($j = -\lambda \text{grad} T$) je skoraj vedno neučinkovito zaradi majhne gostote snovi. Izjeme so gosti objekti: bele pritlikavke, jedra rdečih velikank in nevtronske zvezde.



Slika 1.1

Prevajanje s sevanjem

Notranjost zvezde ni prozorna za svetlobo. Opravka imamo z običajno absorpcijo, ki jo opišemo z masnim absorpcijskim koeficientom $\varkappa$, tako da se v plasti z debelino dr absorbira delež $\varkappa\rho dr$ vpadle svetlobe. Če pride pravokotno na plast debeline dr tok j, da pride skozi le še $j(1 - \varkappa\rho dr)$. Absorpcijski koeficient $\varkappa$ je v splošnem odvisen še od pogojev, pod katerimi se nahajajo plini v zvezdi. Več o tem koeficientu bomo povedali kasneje. Računi pokažejo, da je povprečna prosta pot fotonov $(1/\varkappa\rho)$ v normalnih zvezdah reda velikosti 1 cm. Izračunali bomo, kolikšen tok teče skozi plast debeline dr, če je razlika temperatur med površinama enaka dT. Ker je razpolovna debelina za fotone $1/\varkappa\rho$ majhna, je sevanje v vsaki točki zvezde skoraj izotropno. Zato je tudi sevalni tlak skoraj izotropen, njegova vrednost pa je $P_S = \frac{4}{3}\frac{\sigma}{c}T^4$.

Oglejmo si, kaj se dogaja v tanki lupini zvezdne snovi (glej sliko 1.1). Leva stran Lupine je bolj vroča od desne, zato teče od leve proti desni toplotni tok j - tok fotonov (zaradi enostavnosti obravnavamo kar planparalelno geometrijo). Ker je stanje stacionarno in se v plasti energija niti ne proizvaja niti ne izginja, mora biti ta tok isti pri vseh legah r. Vemo pa, da vsi fotoni, ki sestavljajo to j pri legi r, zaradi sipanja svetlobe v plazmi ne morejo priti do $r + dr$. Zato lahko smatramo, da je tok pri $r + dr$ sestavljen iz fotonov, ki so prišli do r - energijski tok teh fotonov je $j(1 - \varkappa\rho dr)$ - in fotonov, ki so se pridružili temu toku na razdalji dr zaradi

temperaturnega gradienta. Iz povedanega sledi, da mora biti energijski tok tega dela enak $j\varkappa\rho dr$. Kolikšen je tok j za dano temperaturno razliko dT, lahko izračunamo, če upoštevamo, da je plast dr v ravnovesju. Fotoni, ki se v plasti absorbirajo (njihov energijski tok je $j\varkappa\rho dr$), predajo svojo gibalno količino in zato delujejo nanjo s tlakom

$$dp_1 = \frac{d(E/c)}{dtdS} = \frac{dj}{c} = \frac{1}{c} j\varkappa\rho dr,$$

ki narašča v naši sliki 1.1 od leve proti desni. Fotoni, ki se pridružijo toku v plasti, pa delujejo na plast z natanko enako velikim tlakom, ki narašča proti levi in je posledica naraščanja izotropnega sevalnega tlaka $\frac{4}{3}\frac{\sigma}{c}T^4(r)$. Tako imamo:

$$dp_1 = \frac{1}{c} j\varkappa\rho dr = dp_2 = \frac{4}{3}\frac{\sigma}{c} dT^4(r).$$

Odtod pa dobimo končno:

$$j = -\frac{4\sigma}{3\varkappa\rho}\frac{d}{dr}T^4 \tag{1.18}$$

oziroma

$$L(r) = -4\pi r^2 \frac{4\sigma}{3\varkappa\rho}\frac{d}{dr}T^4. \tag{1.19}$$

Po ravnokar izpeljani formuli lahko grobo ocenimo izsev zvezde. Kakor smo že vajeni, nadomestimo odvod temperature z razliko temperatur v sredini in na površini deljeno z radijem zvezde. Tako dobimo:

$$L \approx \frac{16\pi R^2}{3\langle\varkappa\rangle\rho}\frac{\sigma T_c^4}{R}. \tag{1.20}$$

Za T_c vstavimo oceno iz enačbe (1.5) in pridemo do izraza:

$$\begin{aligned} L &\sim \frac{16\pi R}{3\langle\varkappa\rangle\rho}\sigma\frac{1}{k^4}\bar{\mu}^4\frac{(GM)^4}{R^4} \\ &= \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \frac{4\sigma\bar{\mu}^4}{\langle\varkappa\rangle k^4} G^4 M^3. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Veljavnost rezultata, ki smo ga dobili s tako zelo grobimi argumenti, je presenetljivo dobra. Zvezde na glavni veji so iz enake snovi in je zato $\bar{\mu}$ isti za vse zvezde z glavne veje. Izkaže se, da je povprečna prosojnost $\langle\varkappa\rangle$ približno ista za vse zvezde z glavne veje. Zato zveza

$$L \propto M^3$$

dobro ponazarja odvisnost mase od izseva. Iz eksperimentalnih podatkov izločena zveza je

$$L \propto M^{3.3}.$$

Poudariti moramo, da je ujemanje napovedane napovedane zveze med maso in izsevom z opazovanji do neke mere le srečno naključje, kajti prevajanje s sevanjem ni vedno dominantni mehanizem za prenos toplote. Kadar bi bil potreben prevelik temperaturni gradient, da bi se prenesla zadostna količina toplote iz notranjosti na površino, se razvije v zvezdi konvekcija, ki premeša energijo mnogo bolj učinkovito. V takih primerih moramo enačbam zvezdne strukture dodati še člen, ki opisuje prevajanje s konvekcijo.

Prevajanje s konvekcijo

Konvekcijo dobro poznamo iz vsakdanjega življenja, npr. konvekcijo zraka v sobi, ki jo grejemo z radiatorjem. Ob radiatorju se zrak segreje in zato postane njegova gostota manjša kot gostota okolice. Vzgon požene topel zrak navzgor, na njegovo mesto pride hladnejši zrak, ki se zopet segreje in tako se proces konvekcije nadaljuje.

Mehanizem konvekcije v zvezdi pa je nekoliko drugačen. Ker so energijski izvori zvezno porazdeljeni po prostornini, so mirujoči deli plina vedno v ravnovesju z okolico; ravnovesje se lahko poruši le delu plina, ki se giblje. Opazujmo zato majhen masni element, recimo mu mehurček, ki se giblje navzgor. V vsaki točki poti se tlak v mehurčku izenači s tlakom okolice, medtem ko je izenačevanje temperature počasnejše, tako da smemo pri dovolj kratkotrajnih odsekih poti reči, da se plin v mehurčku razpenja adiabatno. Naj bo mehurček na višini r v popolnem ravnovesju z okolico. Ko ga dvignemo za dr, se tlak v njem spremeni za $(dp/dr)dr$, temperatura pa za

$$\begin{aligned} dT_{\text{mehurček}} &= \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) T \frac{dp}{p} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{p} \frac{dp}{dr} dr. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Temperatura okolice je na tej višini padla za

$$dT_{\text{okolice}} = \frac{dT}{dr} dr. \tag{1.23}$$

Če je mehurček sedaj hladnejši od okolice, je tudi težji in zato se vrne in pade nazaj. V takem primeru je plin stabilen in do konvekcije ne more priti. Če pa je mehurček na višini dr toplejši od okolice, je lažji in vzgon ga še poganja navzgor. Plin je tedaj nestabilen in razvijejo se konvekcijski tokovi. Videli smo, da se konvekcija razvije, če je le

$$dT_{\text{mehurček}} > dT_{\text{okolice}} \tag{1.24}$$

oziroma, če vstavimo (1.22) in (1.23):

$$\Delta\nabla T = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{p}\frac{dp}{dr} - \frac{dT}{dr} > 0. \tag{1.25}$$

Količino $-\frac{dT}{dr} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{p}\frac{dp}{dr} = \Delta\nabla T$ imenujemo superadiabatski temperaturni gradient. Naš pogoj torej pove, da nastopi konvekcija, brž ko postane superadiabatski temperaturni gradient pozitiven. Izračunati bi bilo potrebno še toplotni tok, ki spremlja konvekcijsko gibanje. Vendar je naša preprosta slika za tak račun prešibka. Rezultat je tako močno odvisen od robnih pogojev, da je praktično nemogoče izdelati točno teorijo celo za najpreprostejše primere.

Zamislimo si element snovi, ki se dviguje v konvekcijskem toku. Od okolne snovi ga lahko ločimo samo toliko časa, dokler se ne zlije z njo. Razdaljo, na kateri se element zlije z okolico, imenujemo mešalna dolžina. Če poznamo mešalno dolžino, lahko izračunamo, koliko časa bo posamezen element snovi potreboval, da prepotuje to razdaljo (viskoznost seveda zanemarimo) in koliko energije bo prenesel na tej poti. Odtod pa izračunamo, kolikšen bo toplotni tok. Po tej poti pridemo do naslednjega izraza za toplotni tok zaradi konvekcije:

$$j(r) = \frac{\rho c_p}{r}\left(\frac{GM(r)}{T}\right)^{1/2}(\Delta\nabla T)^{3/2}\frac{l^2}{4}. \tag{1.26}$$

Tukaj je c_p specifična toplota plina v zvezdi, l pa je mešalna dolžina. Pri laboratorijskih poskusih se pokaže, da je ta parameter primerljiv z linearnimi razsežnostmi prostora, v kateri se konvekcija vrši. Seveda je mešalna dolžina kritični parameter fenomenološke slike konvekcije in o njej ne vemo preveč. Vendar pa je kljub temu večkrat mogoče narediti dobre modele zvezd. Pomaga nam dejstvo, da je konvekcija za velik faktor bolj uspešna pri prenašanju toplote kot sevanje, tako da superadiabatski

gradienti, ki so za vse druge račune zanemarljivo majhni, že poganjajo na površje vso energijo, ki jo zvezda lahko proizvede v notranjosti. Enačbe (1.26) zato v modelu skoraj ni treba uporabljati, ampak jo beremo takole: če da enačba sevalnega ravnovesja pozitiven superadiabatski gradient, nadomesti temperaturni gradient z adiabatskim, kajti konvekcija, ki se bo razvila, bo že z izredno majhnim superadiabatskim gradientom mogla prenašati dovolj energije.

Poiščimo oceno za superadiabatski gradient v Soncu! Vzemimo, da se vrši konvekcija v plasti z radijem $R_\odot/2$, kjer je gostota $1\,\mathrm{g/cm^3}$ (to je povprečna gostota Sonca), mešalna dolžina pa naj bo del Sončevega radija ($l = \alpha R$). Izsev Sonca pri $R = R_\odot/2$ je kar $L_\odot$, saj se vsa energija proizvede globoko v notranjosti. Ko vstavimo vse konstante v formulo (1.26), dobimo iz nje naslednjo oceno:

$$\Delta\nabla T \sim 10^{-10}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{4/3}.$$

Čeprav bi se vršila konvekcija v plasti z debelino le 1/1000 Sončevega polmera, bi bil superadiabatski gradient še vedno samo $10^{-6}\,\mathrm{K/m}$!

Enačbe (1.1), (1.2), (1.3) ter (1.19) ali (1.26) tvorijo zaključen sistem diferencialnih enačb, ki jim pravimo enačbe zvezdne strukture. Odločitev med (1.3) ali (1.19) je, kot smo povedali, odvisna od superadiabatskega temperaturnega gradienta (1.25). Rešitve enačb zvezdne strukture predstavljajo matematične modele zvezd. Seveda pa lahko konstruiramo modele samo, če poznamo lastnosti snovi v zvezdah, to je prosojnost ($\varkappa(\rho, T)$), hitrost proizvajanja jedrske energije ($\varepsilon(\rho, T)$) ter enačbo stanja ($p(\rho, T)$).

Poglavje 2

Lastnosti snovi v zvezdah

V normalnih zvezdah, to je v zvezdah, ki spadajo na glavno vejo Hertzsprung-Russellovega diagrama, lahko računamo z enačbo idealnega plina

$$p = nkT, \tag{2.1}$$

kjer je n število delcev v enoti prostornine, k pa Boltzmannova konstanta. Ta enačba stanja nam je dovolj dobro znana, da o njej ne bi bilo potrebno izgubljati dosti besed, vendar je zanimivo nekoliko več povedati o tem, zakaj je taka enačba dobra, kljub velikim gostotam ioniziranega plina v središčih zvezd (v središču Sonca znaša gostota okrog $100\,\mathrm{g/cm^3}$).

V splošnem velja, da se plin obnaša kot idealen, če je povprečna prosta pot delcev v plinu dosti večja od povprečne razdalje med njimi; ali z drugimi besedami, plin se obnaša kot idealen, če povprečen delec v plinu bistveno spremeni svojo gibalno količino zaradi trkov, ko premeri razdaljo, ki je mnogo večja od povprečne razdalje med sosedi. Plin je v notranjosti zvezd skoraj popolnoma ioniziran, saj je povprečna termična energija delcev pri nekaj milijonih stopinj Kelvina že dovolj visoka, da razbije atome vodika in helija, ki sta glavni sestavini zvezdne snovi. V takem ioniziranem plinu, ponavadi ga imenujemo plazma, so elektromagnetne interakcije med delci edine pomembne, saj so razdalje med delci ($d \sim 10^{-9}\,\mathrm{cm}$ pri gostoti $100\,\mathrm{g/cm^3}$) mnogo večje od njihove velikosti ($r_{\mathrm{protona}} \sim 10^{-13}\,\mathrm{cm}$). Električne sile imajo dolg doseg, vendar močno sipljejo le, če se delca med trkom dovolj približata. Razdelimo trke med delci na bližnje in oddaljene! Rekli bomo, da je trk bližnji, če se delca odklonita iz prvotne smeri za več kot ϑ_0 in oddaljeni, če je kot manjši. Seveda je meja med bližnjimi in oddaljenimi trki poljubno postavljena, vendar je očitno, da je prenos gibalne količine na povprečen trk manjši, čimbolj redki so trki. Pri malo verjetnih bližnjih trkih so zato tudi ele-

ktromagnetne interakcije zanemarljive in plazma se obnaša kot idealni plin.

Poglejmo naštete pogoje nekoliko bolj podrobno! V prvem približku lahko vzamemo, da so nabiti delci homogeno porazdeljeni po prostoru, zato je verjetnost za bližnji trk približno enaka

$$w_b \approx \frac{\pi b_c^2}{\pi d^2},$$

kjer je d povprečna razdalja med delci, b_c pa tisti kritični parameter, ki deli trke na bližnje in oddaljene. V dovolj redki plazmi so bližnji trki redki in jih lahko obravnavamo kot problem dveh teles. Ko vpeljemo relativne koordinate med delcema, dobimo gibalno enačbo v obliki:

$$\bar{m}\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Z_1 Z_2 c^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

kjer je $\bar{m}$ reducirana masa delcev, ki sodelujeta v trku ($\bar{m} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$), $\mathbf{r}$ je radij vektor, ki povezuje delca, Z_1 in Z_2 pa sta njuna naboja (v enotah osnovnega naboja). Vemo, da so orbite, ki jih opisuje radij vektor $\mathbf{r}$ stožnice - v našem primeru hiperbole. Uporabimo še zakon o ohranitvi energije in vrtilne količine (dva integrala gornje enačbe), pa dobimo za kot odklona delca iz osnovne smeri

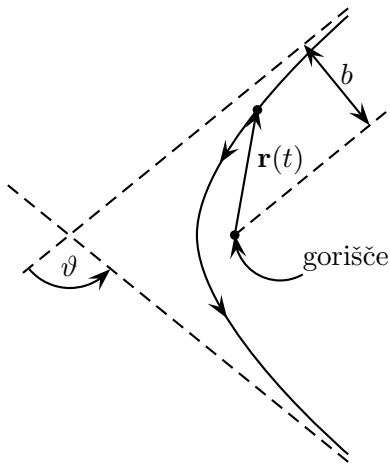
$$\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 r_{cl} m_e c^2}{b\bar{m}v_0^2},$$

kjer je ϑ kot odklona, b parameter trka, v_0 relativna hitrost obeh delcev v veliki oddaljenosti, m_e masa elektrona, r_{cl} pa klasični radij elektrona. Kritični parameter trka je odtod:

$$b_c = Z_1 Z_2 r_{cl}\frac{m_e c^2}{\frac{1}{2}\bar{m}v_0^2},$$

kjer smo za ϑ_0 zaradi udobnosti izbrali $\vartheta_0 = 2\mathrm{arctg}1/2$ ($= 53°$). V plinu s temperaturo T je povprečna kinetična energija delcev $(3/2)kT$, zato je povprečni kritični parameter za delce z nabojema Z_1 in Z_2 enak:

$$\langle b_c\rangle = Z_1 Z_2 r_{cl}\frac{m_e c^2}{\frac{3}{2}kT}. \tag{2.2}$$



Slika 2.1

Pogoj za to, da se plazma obnaša kot idealni plin ($w_b \ll 1$) lahko torej napišemo v naslednji obliki:

$$w_b = \left(Z_1 Z_2 r_{cl} \frac{m_e c^2}{\frac{3}{2} kT} n^{1/3} \right)^2 \ll 1. \tag{2.3}$$

Ocenimo kritični parameter trka za plazmo v središču Sonca, ker je temperatura $15 \times 10^6\,\mathrm{K}$! Če vzamemo, da je plin v središču v glavnem vodik, je $Z_1 = Z_2 = 1$ in dobimo

$$\langle b_c \rangle = 5 \times 10^{-11}\,\mathrm{cm}.$$

Povprečna razdalja med delci ($d = n^{-1/3}$) pa je pri gostoti $100\,\mathrm{g/cm^3}$ približno $2 \times 10^{-9}\,\mathrm{cm}$. Verjetnost za bližnji trk je torej res majhna in enačba idealnega plina (2.1) v središču Sonca prav dobro velja. Če vzamemo, da je temperaturni gradient v zvezdi blizu adiabatskemu (modeli pokažejo, da je to kar dobra ocena), lahko iz enačbe hidrostatičnega ravnovesja tudi vidimo, da verjetnost za bližnji trk, ki jo razen numeričnih faktorjev določa le razmerje $(n/T^3)^{2/3}$, celo počasi pada proti površini. Zato lahko pričakujemo, da je vpliv elektrostatskih interakcij po vsem Soncu zanemarljiv.

Navadno računamo z gostoto mase in ne z gostoto delcev, zato bomo gostoto delcev izrazili z gostoto mase in sestavom zvezdne plazme. Seveda je

$$n = \sum_i n_i,$$

kjer predstavljajo n_i delne gostote posameznih komponent. Gostota mase pa je

$$\rho = \sum_i m_i n_i,$$

kjer je m_i masa delca i-te vrste.

V astrofiziki računamo z utežnimi razmerji posameznih komponent (utežno razmerje elektronov zanemarimo, ker je njihova masa tako majhna), ki so definirani takole:

$$X_i = \frac{m_i n_i}{\rho} = \left(\frac{m_p}{\rho}\right) n_i A_i$$

kjer je A_i atomska masa jedra i-te vrste, m_p pa masa protona. V popolnoma izolirani plazmi pride na vsak atom z vrstno številko Z_i ravno Z_i elektronov, zato je gostota elektronov enaka

$$n_e = \sum_{\text{po jedrih}} Z_i n_i. \tag{2.4}$$

Gostota delcev je končno:

$$n = \sum_{\text{po jedrih}} n_i + \sum_{\text{po jedrih}} Z_i n_i = \frac{\rho}{m_p} + \sum_i (1 + Z_i)\frac{X_i}{A_i} = \frac{\rho}{\bar{\mu}}, \tag{2.5}$$

kjer je količina $bar\mu$, ki je bila definirana z zadnjo enakostjo, očitno povprečna masa delca v plazmi.

Utežni razmerji najpogostejših elementov v zvezdah - vodika in helija - se navadno označita z X in Y, za težje elemente, ki jih ni več kot tri odstotke, pa se računa s povprečnim utežnim razmerjem Z.

S tem pa še ne smemo popolnoma zaključiti razprave o plinski enačbi v zvezdah. Do sedaj smo namreč govorili samo o popolnoma ionizirani plazmi, ki se nahaja v sredicah zvezd. Ko pa gremo proti površju, temperatura pada in s tem tudi stopnja ionizacije. Tudi v plazmi, ki je le delno ionizirana in ni preveč gosta, shajamo z enačbo idealnega plina v

obliki $p = nkT$, s tem da je gostota delcev (n) število vseh prostih delcev (jeder, ionov in elektronov) v enoti prostornine. To število je odvisno od temperature in gostote, saj se jedro in elektroni, ki so nanj vezani, štejejo kot en sam delec. Računov za povprečno število elektronov, ki so vezani na jedro z nabojem Z_i, tukaj en bomo navajali, bralec pa si jih lahko ogleda npr. v knjigi J. P. Cox & R. T. Guili: *Principles of Stellar Structure*. Tam preberemo, da je odstopanje od formule (2.1) zaradi vezanja elektronov na jedra že znatno, če temperatura pade pod 100 000 K; za večino zvezd je to tik pod površjem.

Razen tlaka, ki ga povzročajo atomi in elektroni s svojim gibanjem, je v nekaterih večjih zvezdah pomemben še sevalni tlak fotonov:

$$p_{\mathrm{sev}} = \frac{\sigma}{3c} T^4. \tag{2.6}$$

V modelih za zvezde spektralnega tipa O ali B je prispevek tega člena do nekako 10% celotnega tlaka. Zanimiv pa je argument, da zaradi tega prispevka k tlaku ne najdemo zvezd, ki bi imele več kot sto sončnih mas. Sklepamo takole: če bi v neki zvezdi prevladal sevalni tlak, bi bila ta nestabilna, saj je adiabatski indeks fotonskega plina 4/3 (glej poglavje o relaksacijskih časih). Redek plin, ki bi tako močno svetil, da bi fotonski tlak prevladal, bi se verjetno v kratkem razpihnil, nastali fragmenti pa bi se lahko skrčili v manjše zvezde. Ocenimo maso, pri kateri bi prišlo do takega pojava! Že na prvih straneh smo dobili ocene, za tlak in temperaturo plazme v središču zvezde (enačbi (1.4) in (1.5)). Od tod lahko takoj dobimo oceno za razmerje med sevalnim tlakom in celotnim tlakom v središču zvezde:

$$\frac{p_{\mathrm{sev}}}{p_c} \approx \frac{(\sigma/3c)T^4}{3GM^2/4\pi R^4} = \frac{(\sigma/3c)\left(\frac{\bar{\mu}c^2 GM^4}{kRc^2}\right)^4}{3GM^2/4\pi R^4}.$$

Če izrazimo Stefanovo konstanto σ s fundamentalnimi konstantami ($\sigma = (\pi^2/90)k^4/\hbar^3c^2$) in vpeljemo Planckovo maso $^*m_{Pl} = (\hbar c/G)^{1/2} = 2.18 \times 10^{-5}$ g, lahko gornje razmerje napišemo v pregledni obliki

$$\frac{p_{\mathrm{sev}}}{p_c} \approx \frac{\pi^2}{45}\left(\frac{\bar{\mu}^2 M}{m_{Pl}^3}\right)^2. \tag{2.7}$$

*Kaže, da igra Planckova masa v astrofiziki posebno pomembno vlogo. Glej npr. D. W. Sciama: *Black Holes and their Thermodynamics*, Vistas in Astronomy, **19**, 385, 1976

Če je masa M enaka $16\,M_\odot$, je to razmerje enako 1. Pri tako masivnih zvezdah je torej tlak fotonov že močno pomemben. Natančnejši računi pokažejo, da je naša ocena sicer nekoliko prenizka (približno za faktor 5), vendar kvalitativno pojasni nestabilnost velikih zvezd.

Jedrske reakcije

Omenili smo že, da je glavni energijski rezervoar zvezde jedrska energija, ki se sprošča ob zlivanju jeder pri dovolj visokih temperaturah. Daleč največ energije se sprosti pri reakcijah zlivanja vodika v helij. Ta proces lahko poteka po dveh poteh in sicer kot reakcija p-p ali pa kot ogljikov ciklus. Ti dve reakcija sta razmeroma dobro preučeni in izrazi za gostoto sproščanja energije, kakor jih bomo zapisali, precej dobro opišejo realno stanje.

Zlivanje vodika v helij

Reakcija p-p poteka takole:

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{p}+\mathrm{p} & \rightarrow & \mathrm{D}+\mathrm{e}^+ + \nu_e & +1.44\,\mathrm{MeV} \\ \mathrm{D}+\mathrm{p} & \rightarrow & \mathrm{He}^3+\gamma & +5.49\,\mathrm{MeV} \\ \mathrm{He}^3+\mathrm{He}^3 & \rightarrow & \mathrm{He}^4+\mathrm{p}+\mathrm{p} & +12.85\,\mathrm{MeV} \end{array} \tag{2.8}$$

Reakcija ogljikovega ciklusa pa potekajo pri nekoliko višjih temperaturah na naslednji način:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{C}^{12} & +\mathrm{p} & \rightarrow & \mathrm{N}^{13}+\gamma \\ \mathrm{N}^{13} & & \rightarrow & \mathrm{C}^{13}+\mathrm{e}^+ + \nu_e \\ \mathrm{C}^{13} & +\mathrm{p} & \rightarrow & \mathrm{N}^{14}+\gamma \\ \mathrm{N}^{14} & +\mathrm{p} & \rightarrow & \mathrm{O}^{15}+\gamma \\ \mathrm{O}^{15} & & \rightarrow & \mathrm{N}^{15}+\mathrm{e}^+ + \nu_e \\ \mathrm{N}^{15} & +\mathrm{p} & \rightarrow & \mathrm{C}^{12}+\mathrm{He}^4 \end{array} \tag{2.9}$$

Efekt obeh reakcij je isti, to je zlivanje štirih protonov v helijevo jedro, le da je za reakcije ogljikovega cikla potrebna prisotnost C^{12} in (ali) N^{14} kot katalizatorja. V normalni zvezdni snovi je vedno dovolj stabilnih izotopov da reakcija lahko steče ($X_{\text{C-N}} \sim 0.003$).

Pri zlivanju vodika v helij se sprosti 27.8 Mev energije na vsak formiran helijev atom, ki se razdeli med žarke γ, delce in nevtrine. Energija žarkov γ in delcev se s trki hitro prenese na okolno snov in jo s tem segreje,

medtem ko nevtrino popolnoma svobodno pobegne in je njegova energija za zvezdo izgubljena. Pri reakcijah ogljikovega ciklusa odnesejo nevtrini v povprečju nekoliko več energije kot pri reakcijah p-p, tako da ostane v zvezdi v povprečju 25.0 MeV na formiran helijev atom v reakciji ogljikovega cikla in 26.2 MeV, če je bil helijev atom proizveden z reakcijo p-p.

Računanje hitrosti reakcij zlivanja protonov v helij na srečo ne zahteva zelo natančnega poznavanja vseh detajlov jedrske fizike. Ugotovili smo že, da so temperature v notranjosti zvezd, kjer take reakcije potekajo, okrog 10^7 K in je torej povprečna termična energija delcev v zvezdi le kakih 1000 eV. To pomeni, da poteka reakcija po direktni poti in so prispevki resonančnih pojavov zanemarljivi.

Hitrost reakcije med delci 1 in 2 definiramo kot število reakcij med temi delci v enoti prostornine in časa. Naj bodo delci 1 tarča, ki jo zadevajo delci 2. Število zadetkov v enoti prostornine in časa je enako produktu toka delcev 2 (vn_2) in površine tarče 1 v enoti prostornine ($q(v)n_1$); v je relativna hitrost med projektili in tarčo, $q(v)$ je presek za sipanje delca 1 na 2, n_1 in n_2 pa sta številski gostoti delcev 1 in 2. Število reakcij dobimo, če pomnožimo število zadetkov z verjetnostjo, da zadetek sproži reakcijo. Ta je enaka produktu verjetnosti za tuneliranje skozi coulombsko bariero med nabitima delcema ($P_p(v)$) in verjetnosti, da reakcija steče pa zaželenem kanalu, potem ko je že prišlo do tuneliranja (P_N). Ker so vse gornje verjetnosti še neodvisne od relativne hitrosti med projektilom in tarčo, moramo delce v plinu razdeliti na hitrostne razrede in sešteti prispevke iz posameznih razredov. Hitrost reakcije n napišemo tako v naslednji obliki:

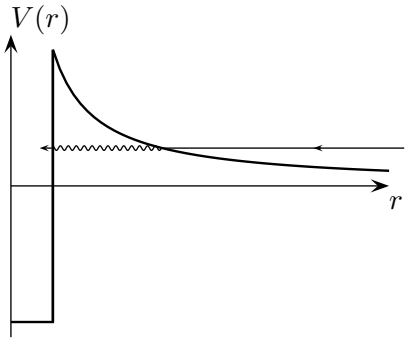
$$\dot{n} = \int_0^\infty v n_2 q(v) n_1 P_p(v) P_N(v) D(T, v) dv. \tag{2.10}$$

Posamezne parametre v gornji formuli je treba bodisi izmeriti v laboratoriju, bodisi izračunati na snovi teoretskih modelov. Glavno temperaturno odvisnost hitrosti reakcije določata verjetnost za tuneliranje $P_p(v)$ in Boltzmannov faktor $D(v, T)$. Boltzmannov faktor je seveda

$$D(T, v) = \left(\frac{\bar{m}}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-\frac{\bar{m}v^2}{2kT}}, \tag{2.11}$$

kjer je $\bar{m}$ reducirana masa za delca 1 in 2, ki vstopata v reakcijo:

$$\bar{m} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{2.12}$$



Slika 2.2

Verjetnost za tuneliranje pa lahko izračunamo, če poznamo obliko potencialne bariere. Navadno se aproksimira potencial med dvema jedroma s coulombskim potencialom $1/r$, ki ga na neki razdalji r_0 nadomesti potencialna jama jedrskih sil (sl. 2.2)

Ta aproksimacija je dovolj dobra, kadar je medsebojna hitrost delcev majhna, tako da je dolžina tunela skozi bariero mnogo večja od dosega jedrskih sil. Kvantnomehanski račun da potem naslednji izraz za verjetnost tuneliranja:

$$P_p(v) \propto e^{2\pi\alpha Z_1 Z_2 \frac{c}{v}}, \tag{2.13}$$

kjer je α konstanta fine strukture ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$), Z_1 in Z_2 pa naboja jeder, ki reagirata.

Boltzmannov faktor ima maksimum pri hitrosti, ki ustreza povprečni termični energiji ($3/2kT$) (okrog 1000 eV), ter močno pada pri višjih hitrostih, verjetnost za tuneliranje pa zraste šele, ko postane medsebojna hitrost znaten odlomek svetlobne hitrosti. Produkt teh dveh faktorjev je tako funkcija, ki ima znatne vrednosti samo v zelo ozkem intervalu okrog ekstrema pri

$$v_0 \sim \bar{v}_{\text{termično}} \left(\pi Z_1 Z_2 \alpha \sqrt{\frac{mc^2}{2kT}}\right)^{1/3}. \tag{2.14}$$

Za reakcijo p-p in pri temperaturi 10^7 K je $v_0 = 2.25\,\bar{v}_{\text{termično}}$.

Integral (2.10) dobi preprosto obliko, če v vse ostale faktorje, ki se s

hitrostjo počasi spreminjajo, vstavimo kar V_0. Potem je:

$$\dot{n} \propto e^{-3\left(\pi Z_1 Z_2 \alpha \sqrt{\bar{m}c^2/2kT}\right)^{2/3}}. \tag{2.15}$$

Zaradi krajše pisave uvedemo karakteristično temperaturo za jedrske reakcije

$$T_n = \frac{\alpha^2 m_p c^2}{4\pi^2 k} \qquad = 14.8 \times 10^6\,\mathrm{K}. \tag{2.16}$$

Gornja formula se potem glasi:

$$\dot{n} \propto \exp\left[-3\left(\pi^2 Z_1 Z_2\right)^{2/3}\left(\frac{2\bar{m}}{m_p}\frac{T_n}{T}\right)^{1/3}\right]. \tag{2.17}$$

Iz tega izraza vidimo, da je pri nižjih temperaturah ogljikov ciklus zaradi visokega naboja jeder in visoke reducirane mase dosti močneje dušen kot reakcija p-p. Vendar so preseki za reakcije v ogljikovem ciklu ugodnejši, tako da te reakcije sčasoma dosežejo reakcijo p-p. Pri še višji temperaturi pa ogljikov ciklus popolnoma prevlada, ker je njegova temperaturna odvisnost, kakor kaže gornji izraz, dosti bolj strma kot temperaturna odvisnost za reakcijo p-p.

V stacionarnem stanju poteka nuklearno gorenje v povprečju ravno po fazah, kot so zapisane v (2.8) (če prevlada reakcija p-p) ali (2.9) (če prevlada ogljikov ciklus). Tako mora npr. na vsako zlitje protonov v reakciji p-p priti v povprečju eno zlitje protona z devterijem, na dve taki reakciji pa eno zlitje dveh He^3 v He^4. Hitrosti teh reakcij morajo biti zato v naslednjem razmerju:

$$\dot{n}_{\mathrm{p+p}} = \dot{n}_{\mathrm{p+D}} = 2\dot{n}_{\mathrm{He^3+He^3}}. \tag{2.18}$$

Reakcije tečejo v takem stacionarnem zaporedju le, če so koncentracije posamznih komponent v ravnovesnem razmerju. Računi na modelih zvezd so pokazali, da se vzpostavijo ravnovesne koncentracije v zvezdah s približno tolikšno maso kot je Sončeva, v nekako 100 milijonih let, kar je le stotina dobe, v kateri Sonce izrablja gorenje vodika kot vir energije.

Energija, ki se sprosti pri jedrskih reakcijah, je enaka vsoti energij na posamezno vrsto reakcij v ciklu. Energija na vrsto reakcije v enoti prostornine in časa pa je seveda enaka hitrosti reakcije, pomnoženi z energijo,

ki se odda pri eni sami reakciji. V ravnovesju, kjer so hitrosti reakcij povezane, pa je proizvedena energija v enoti prostornine in časa enaka energiji vseh reakcij v ciklu, pomnoženi s številom ciklov (na enoto prostornine in časa), to je s hitrostjo ene od reakcij, ki v ciklu samo enkrat poteče.

Ko so vstavili eksperimentalne podatke v (2.10) in izračunali hitrosti reakcij po opisani poti, so dobili naslednje izraze za proizvodnjo jedrske energije v zvezdah na enoto **mase** in časa:

a) za reakcijo p-p:

$$\varepsilon_{\text{p-p}} = K_{\text{p-p}} \rho X^2 \left(\frac{T_n}{T}\right)^{2/3} e^{-13.77(T_n/T)^{1/3}}, \tag{2.19}$$

kjer je $K_{\text{p-p}} = 3.4 \times 10^5\,\text{erg}\,\text{cm}^3/\text{g}^2\text{s}$ in

b) za ogljikov ciklus

$$\varepsilon_{\text{C-N}} = K_{\text{C-N}} \rho X X_{\text{C-N}} \left(\frac{T_n}{T}\right)^{2/3} e^{-62.0(T_n/T)^{1/3}}, \tag{2.20}$$

kjer je $K_{\text{C-N}} = 1.32 \times 10^{27}\,\text{erg}\,\text{cm}^3/\text{g}^2\text{s}$.

Gorenje helija

Ko zvezda potroši večino vodika v jedru, postanejo reakcije vse redkejše in zvezda se začne krčiti in segrevati (glej str. 7). Pri temperaturi okrog 10^8 K lahko zvezda začne izkoriščati jedrsko energijo, ki se sprosti pri zlivanju helija v ogljik. Trojna reakcija α, ki omogoča to zlivanje, poteka takole:

$$\begin{array}{lcll} \text{He}^4 + \text{He}^4 & \rightarrow & \text{Be}^8 + \gamma & -95\,\text{keV} \\ \text{Be}^8 + \text{He}^4 & \rightarrow & \text{C}^{12} + \gamma & +7.5\,\text{MeV}. \end{array}$$

Prva reakcija je endotermna. Be^8 je zelo nestabilen in hitro razpade nazaj na dva delca α, če si prej ne ujame še enega helijevega jedra, s katerim končno reagira v C^{12}. Prav zaradi nestabilnosti Be^8 se gornja reakcija imenuje trojna reakcija α. Približek v prejšnjih računih, da so vse funkcije v integralu (2.10) razen D in P_p precej gladke, sedaj ni več veljaven, ker je zelo pomembna resonanca Be^8. Izraz za gostoto termonuklearne moči na enoto mase, ki ga dobijo s pomočjo eksperimentalnih podatkov, je:

$$\varepsilon_{3\alpha} = K_{3\alpha} \rho^2 Y^3 e^{10.5\bar{\mu}(nb_c^3)^{1/2}} \left(\frac{T_n}{T}\right)^3 e^{-292\frac{T_n}{T}}, \tag{2.21}$$

kjer je $K_{3\alpha} = 1.07 \times 10^{14}\,\text{erg}\,\text{cm}^6/\text{g}^3\text{s}$, b_c pa je definiran v (2.2).

Prosojnost zvezdne snovi

V poglavju "Prevajanje s sevanjem" (str. 9) smo poskušali v grobem razumeti, kolikšen energijski tok teče skozi plast zvezdne plazme, če je na njej dana temperaturna razlika in če poznamo masni absorpcijski koeficient plazme za svetlobo, ki teče skozi to plast. V tem poglavju bomo skušali povedati nekaj o tem, kako dobimo podatke o masnem absorpcijskem koeficientu. Podobno kot pri jedrskih reakcijah se moramo tudi tukaj zanašati na teoretične račune, saj na Zemlji ne moremo delati poskusov s plazmo, kakršna je v zvezdah.

Ko smo razpravljali o prevajanju s sevanjem, smo nakazali, kako bi v načelu (če bi mogli ustvariti ustrezne pogoje) merili absorpcijski koeficient: na plast plazme posvetimo s curkom svetlobe (gostota toka j_0) in merimo, kolikšen del te svetlobe (gostota toka j') se je absorbiral v plasti. Po definiciji absorpcijskega koeficienta $\varkappa$ na str. 9 je:

$$\frac{j'}{j_0} = \varkappa \rho dl, \tag{2.22}$$

kjer je ρ gostota plazme, dl pa njena debelina.

Tako dobljeni absorpcijski koeficient je v splošnem odvisen od lastnosti svetlobe, s katero svetimo skozi plast (in seveda od stanja plazme). Če merimo z enobarvno svetlobo, dobimo monokromatski absorpcijski koeficient $\varkappa_\nu$. V enačbi (1.19) pa potrebujemo koeficient za svetlobo, ki gre v resnici skozi izbrano plast. Dobimo ga s primernim povprečenjem monokromatskega absorpcijskega koeficienta.

Oglejmo si najprej mehanizme, ki so odgovorni za oslabitev curka svetlobe pri prehodu skozi plast plazme. Razdelimo jih lahko na mehanizme, ki so odvisni od kolektivnih nihanj nabojev v plazmi (pojavi, ki so povezani z lomnim količnikom in disperzijo svetlobe) ter na mehanizme, ki so odvisni od sipanja oziroma od absorpcije fotonov na posameznih nabitih delcih.

Kolektivni mehanizmi v normalnih zvezdah v splošnem niso pomembni, ker sta značilni frekvenci najpomembnejših kolektivnih nihanj - to sta plazemska frekvenca ($\omega_p = (n_e e^2/m_e \varepsilon_0)^{1/2}$) in ciklotronska frekvenca ($\omega_c = eB/m_e$) - vedno precej nižji od frekvenc povprečnih fotonov v

notranjosti zvezde*. Lomni količnik zvezdne snovi je zato praktično enak 1. Za pojemanje svetlobe v poslanem curku je zato odgovorno samo sipanje fotonov na posameznih nabojih v plazmi.

Poglejmo mikroskopsko sliko plazme "v laboratoriju" preden posvetimo nanjo s svetlobo. Plazma je v ravnovesju pri zelo visoki temperaturi, kar pomeni, da je temperatura ionskega plina enaka temperaturi elektronskega plina (glej str. 16), razen tega pa je prisoten še "fotonski plin" z enako temperaturo. Seveda pa si fotonov iz tega "plina" ne smemo predstavljati kot delcev, katerih število se ohranja, ampak se sipljejo, absorbirajo in nastajajo ob interakcijah z naboji v plazmi. V termodinamskem ravnovesju se navedeni procesi tako uravnajo, da je povprečna porazdelitev fotonov po prostoru in smereh homogena in izotropna, po frekvencah pa Planckova.

Ko posvetimo na plazmo v ravnovesju s curkom svetlobe, se fotonom iz fotonskega plina pridružijo še usmerjeni fotoni iz curka. Tudi ti se gibljejo med nabitimi delci v plazmi s hitrostjo svetlobe (lomni količnik je 1) in se sipljejo ali absorbirajo, če "zadenejo na sipalno površino" nabitega delca. To izločanje fotonov iz prvotnega curka je odgovorno za slabitev curka vzdolž poti.

Sipani oziroma absorbirani fotoni se pridružijo toplotnemu Planckovemu sevanju, oziroma oddajo svojo energijo nabitim delcem. Če je njihovo število v enoti prostornine dovolj majhno proti gostoti fotonov v Planckovem spektru, jih lahko zanemarimo. **Samo** v takih primerih je teorija prenosa energije s sevanjem preprosta in velja enačba (1.18) ter formule za prosojnost, ki jih bomo izpeljali. Omenjeni pogoj je dobro izpolnjen v notranjosti zvezd, kar nam daje še en vzrok, da se odpovemo natančnejšemu razglabljanju o problemih atmosfer.

Iz povedanega je razvidno, da je absorpcijski koeficient $\varkappa$ odvisen samo od verjetnosti za sipanje oziroma absorpcije fotonov na posameznih nabojih v plazmi. Pri teh procesih pridejo v poštev le elektroni, ker je neposredna interakcija fotonov z ioni zaradi njihove mnogo večje mase zanemarljiva.

*Pripomniti pa velja, da so ti mehanizmi še kako pomembni za radijske astronome. Radijska astronomija Sonca je npr. danes močna veja astronomije, ki je in še vedno razkriva mnoge pomembne detajle o fiziki Sonca.

Verjetnost za sipanje oziroma absorpcijo fotonov na elektronih podamo s polnim sipalnim presekom ("sipalno površino") σ, ki je definirana takole: če vpada na elektron svetlobni tok z gostoto j_0, elektron pa pri tem siplje energijo dE/dt v enoti časa, velja:

$$dE/dt = \sigma/j_0. \tag{2.23}$$

Sipalni presek si torej lahko predstavljamo kot črno površino σ v toku fotonov. Če foton zadane to površino, se siplje in je izgubljen iz prvotnega curka, drugače pa gre nemoteno naprej.

Računanje presekov za sipanje je naloga iz kvantne mehanike, ki zna biti v nekaterih primerih zelo težavna, zato bomo tukaj rezultate kar prepisali. Sipanje na elektronih so razdelili na različne procese in sicer na:

a) Thomsonovo sipanje - to je drugo ime za Comptonovo sipanje v limiti, ko je energija vpadlega fotona majhna proti $m_e c^2$. Mehanizem tega sipanja lahko razumemo tudi klasično na naslednji način. Elektron, na katerega vpade elektromagnetni val, niha s frekvenco vpadlega valovanja, ker deluje nanj električno polje valovanja. Tako nihajoč elektron dipolno sevain s tem siplje energijo vpadlega valovanja. Po opisanem sklepu pridemo do naslednjega izraza za presek za Thomsonovo sipanje:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_{cl}^2, \tag{2.24}$$

kjer je r_{cl} klasični radij elektrona. Ta presek je neodvisen od frekvence vpadlega fotona.

b) Prosto-prosto absorpcijo - to je absorpcija fotonov na prostem elektronu, ki se nahaja v bližini iona in preide po absorpciji v stanje z višjo energijo. Absorpcijski presek za ta proces lahko izračunamo s kvantno mehaniko. Ponavadi ga pišejo v obliki:

$$\sigma_{f\text{-}f} = \sigma_T \frac{Z_i^2 \alpha}{4\pi\sqrt{3}} \frac{c}{v} (\lambda^3 n_i) g_{f\text{-}f}, \tag{2.25}$$

kjer je Z_i naboj iona (v enotah osnovnega naboja), α konstanta fine strukture ($\alpha = 1/137$), v hitrost elektrona, λ valovna dolžina vpadlega fotona, n_i število ionov z nabojem Z_i v enoti prostornine, $g_{f\text{-}f}$ pa numerični faktor - tako imenovan Gauntov faktor. Velikost Gauntovega

faktorja je reda velikosti 1, odvisen pa je tako od valovne dolžine λ kot od gostote vseh nabojev v plazmi. Zapis z Gauntovim faktorjem je v navadi še od začetkov takih računov, ko so Kramers in drugi z duhovito uporabo korespondenčnega načela med kvantno in klasično mehaniko prišli do gornjega rezultata brez Gauntovega faktorja. Danes so Gauntovi faktorji za različne pogoje izračunani in tabelirani.

c) Vezano-prosto absorpcijo in vezano-vezano absorpcijo. To je absorpcija fotona pri prehodu elektrona iz vezanega v prosto stanje oziroma iz nižje ležečega v višje ležeče vezano stanje. Presek za vezano-prosto absorpcijo ima obliko:

$$\sigma_{b\text{-}f} = \sigma_T \frac{Z_i^4}{\sqrt{3}n^5} \left(\alpha \frac{m_e c^2}{h\nu} \right)^3 g_{b\text{-}f}, \tag{2.26}$$

kjer je Z_i naboj iona, v katerem je elektron prvotno vezan v n-tem vzbujenem stanju, ν frekvenca vpadlega fotona, $g_{b\text{-}f}$ pa je podobno kot zgoraj Gauntov faktor, s katerim se upoštevajo razni detajli kot npr. to, da valovne funkcije elektronov niso identične z vodikovimi valovnimi funkcijami, za katere je bil račun prvotno narejen. Vrednost tega faktorja je reda velikosti 1, če je energija vpadlega fotona zadostna, da vrže elektron iz n-tega vzbujenega stanja v prosto stanje, drugače pa je enaka 0. Zaradi zelo močne absorpcije v bližini težkih elementov (Z_i^4) je prispevek tega člena zaznaven. Podobno velja za vezano-vezano absorpcijo, vendar je treba sipalne preseke za te procese obravnavati posebej za vsak atom. Zaradi sorazmerno majhnega faznega prostora elektronov v vezanih stanjih je ta proces v notranjosti zvezd verjetno najmanj pomembe, doda pa novo dimenzijo zahtevnosti pri natančnem študiju atmosfer.

Sedaj lahko napišemo izraz za monokromatski masni absorpcijski koeficient. Zaradi udobnosti ga razdelimo na člen, ki predstavlja absorpcijo iz curka zaradi Thomsonovega sipanja, zaradi prosto-proste absorpcije itd.

Vzemimo plast plazme s površino S in debelino dl, v kateri je gostota prostih elektronov enaka n_e ($n_e = (1 + X)\rho/2m_p$ - glej poglavje o enačbi stanja). Če je energijski tok, ki pada v curku na to plast, $j_0 S$, se po dl siplje energijski tok $j_0(n_e S dl)\sigma_T$. Prispevek Thomsonovega sipanja k absorpcijskemu koeficientu je torej (glej (2.22)):

$$\varkappa_T = \frac{n_e}{\rho}\sigma_T = (1 + X)\frac{\sigma_T}{2m_p}. \tag{2.27}$$

Na podoben način pridemo do prispevka k absorpcijskemu koeficientu zaradi prosto-proste absorpcije. Potrebna pa je malo večja pazljivost. Po absorpciji fotona preide elektron v višje energijsko stanje in je zato proces možen le, če višje stanje še ni zasedeno. Sipalni presek elektrona v idealnem elektronskem plinu v **termodinamičnem ravnovesju** je zato za faktor $1 - e^{h\nu/kT}$ manjši kot sipalni presek enega samega elektrona v bližini iona. Po premisleku iz prejšnjega odstavka in z upoštevanjem dejstva, da je porazdelitev elektronov po hitrostih Boltzmannova ($D(T, v)$ - glej (2.11)), pridemo do naslednjega izraza prispevka prosto-proste absorpcije:

$$\varkappa_{f\text{-}f} = \kappa_T \frac{\alpha c^4}{4\pi\sqrt{3}\nu^3} \frac{\rho}{m_p} \left(1 - e^{h\nu/kT}\right) \langle g_{f\text{-}f}\rangle (X + Y + Z\langle Z_i\rangle). \qquad (2.28)$$

Prispevek vezano-proste absorpcije izračunamo iz (2.26) na enak način kot zgoraj, če poznamo število elektronov v kvantnem stanju n v enoti mase v plazmi. Ta zadnji problem zahteva nekoliko več razprave in se bomo tukaj zadovoljili z ugotovitvijo, da je frekvenčna odvisnost vezano-prostega absorpcijskega koeficienta kvalitativno podobna frekvenčni odvisnosti prosto-prostega absorpcijskega koeficienta. Medtem ko pri prosto-prosti absorpciji nagostnsot težkih elementov (Z) ni pomembna (glej zadnji oklepaj v (2.28)), je pri vezano prosti absorpciji bistvena (zaradi koeficienta Z^4 v (2.26)) - absorpcijski koeficient je približno sorazmeren z Z. Prosto-prosta absorpcija prevlada nad vezano-prosto, če je $Z \lesssim 1/2\,\%$, v zvezdah z nagostnostjo Z več od $2\,\%$ pa prevladuje vezno-prosta absorpcija nad prosto-prosto.

Končno lahko pogledamo, kako izračunati absorpcijski koeficient $\varkappa$, ki nastopa v enačbi prenosa energije s sevanjem (1.18). To enačbo lahko napišemo v obliki:

$$j = \frac{c}{3\varkappa\rho} \frac{d}{dr}(\xi),$$

kjer je $\xi = \sigma T^4/c$ gostota energije fotonskega plina pri temperaturi T. Pokaže se, da velja ta zveza za vsako frekvenco posebej, tako da lahko napišemo:

$$\frac{dj}{d\nu} = -\frac{c}{3\varkappa_\nu\rho} \frac{d}{dr}(\xi_\nu),$$

kjer je ξ_ν spektralna gostota energije fotonskega plina - Planckova porazdelitev (naša teorija velja le za majhne odklone od temodinamičnega ravnovesja). To enačbo integriramo po vseh frekvencah in dobimo:

$$j = -\frac{c}{3\rho}\frac{dT}{dr}\int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_\nu}\frac{\partial \xi_\nu}{\partial T}d\nu.$$

Desna stran je po definiciji enaka $\frac{c}{3\varkappa\rho}\frac{d}{dr}\frac{4\sigma}{c}T^4$. Zato je:

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{\int \frac{1}{\varkappa_\nu}\frac{\partial \xi_\nu}{\partial T}d\nu}{\frac{d}{dT}\left(\frac{\sigma}{c}T^4\right)} = \frac{\int \frac{1}{\varkappa_\nu}\frac{\partial \xi_\nu}{\partial T}d\nu}{\int \frac{\partial \xi_\nu}{\partial T}d\nu}. \tag{2.29}$$

Tako definirano povprečje se imenuje Rosselandovo povprečje.

Na koncu si poglejmo pomen posameznih prispevkov k absorpcijskemu koeficientu. Če je eden izmed absorpcijskih koeficientov mnogo večji od ostalih, Je Rosselandovo povprečje absorpcijskega koeficienta kar enako Rosselandovemu povprečju tega koeficienta (v splošnem pa to seveda ni res). Relativno pomembnost posameznih prispevkov lahko zato ugotovimo tako, da primerjamo Rosselandova povprečja monokromatskih absorpcijskih koeficientov. Če vpeljemo "značilno gostoto" $\rho_0 = 10\,\mathrm{g/cm^3}$ (ta red velikosti je značilen za sredice zvezd) in značilno temperaturo $T_n = 14.8 \times 10^6\,\mathrm{K}$ (glej str. 23), lahko napišemo Rosselandova povprečja absorpcijskih koeficientov v obliki:

$$\varkappa_{f\text{-}f} = 0.15\varkappa_T(X + Y + Z\langle Z_i\rangle)\frac{\rho/\rho_0}{(T/T_n)^{3.5}}, \tag{2.30}$$

$$\varkappa_{b\text{-}f} = 170\varkappa_T Z\frac{\rho/\rho_0}{(T/T_n)^{3.5}}. \tag{2.31}$$

Odtod vidimo, da prevlada pri visokih temperaturah in dovolj nizkih gostotah Thomsonovo sipanje, pri nižjih temperaturah pa odloča odstotek težkih elementov (Z) o prevladi prosto-prostega ali pa vezano-prostega sipanja.

Poglavje 3

Modeli zvezd

Namen prejšnjih poglavij je prikazati bralcu pot do enačb zvezdne snovi in mu omogočiti, da vsaj približno presodi njihovo veljavnost. Če se omejimo na zvezde, ki še niso na koncu svoje razvojne poti (v glavnem glavna veja v H-R diagramu) lahko povzamemo naslednje o enačbah zvezdne snovi:

a) enačba stanja je skoraj vedno enačba idealnega plina, njena veljavnost pa je zelo dobra.

b) Pogoji, pod katerimi potekajo jedrske reakcije v zvezdah, ne morejo biti ustvarjeni v laboratoriju na Zemlji in zato nimamo neposrednega dokaza za veljavnost formul (2.19), (2.20) in (2.21). Z meritvami na Zemlji pa lahko merimo vse parametre, ki nastopajo pri izpeljavi gostote moči, ki jo proizvajajo jedrske reakcije. Tako lahko izračunamo, da je natančnost formul (2.19), (2.20) in (2.21) (oziroma njihovih novejših ekvivalentov) precej dobra.

c) Izraze za prosojnost zvezdne snovi je treba obravnavati bolj kritično. Njihova natančnost je je bistveno odvisna od tega, kako dobro so izračunani Gauntovi faktorji, ki so odvisni od temperature ter od sestave in gostote snovi. Ne smemo pa tudi pozabiti, da so bili ti izrazi izpeljani s predpostavko o lokalnem termodinamskem ravnovesju in s predpostavko, da prehodi elektronov med vezanimi atomskimi stanji ne prispevajo bistveno k sipanju svetlobe. Obstajajo poskusi, da bi zmanjšali število predpostavk in uporabili bolj natančne eksperimentalne podatke za sipalne preseke foton-elektron. Rezultati, ki so jih dobili po taki, načeloma boljši potim pa navadno niso opravičili vloženega truda.

d) Za prenos energije s konvekcijo imamo zaenkrat samo fenomenološko teorijo, katere napovedi so lahko precej nenatančne. Fenomenološke

parametre poskušajo določiti na podlagi opazovanj v zemeljski in sončni atmosferi, vendar so precej negotovi.

e) Razumevanje zvezdnih atmosfer je še na precej nizki stopnji. Glavno težavo predstavlja v tem primeru naše slabo razumevanje prenosa energije s konvekcijo in pa težave pri reševanju splošne enačbe za prenos energije s sevanjem, v primeru, ko pogoji lokalnega termodinamskega ravnovesja niso izpolnjeni.

Zaradi naštetih negotovosti so seveda modeli zvezd še odvisni od nekaterih fenomenoloških parametrov. Število teh parametrov pa ni preveliko, kar omogoča, da lahko uskladimo modele z rezultati opazovanj. Kljub negotovostim nam torej modeli lahko pojasnijo nekatere bistvene lastnosti zvezd, kot npr.: odvisnost izseva od mase in sestava, na modelih lahko opazujemo "življenje" zvezd in ugotovimo, koliko časa se zadržujejo v posamezni fazi razvoja itd.

Homogeni modeli

Oglejmo si homogene modele za zvezde, ki ležijo na glavni veji Hertzsprung-Russellovega diagrama. Glavni privzetek homogenega modela je ta, da je koncentracija posameznih elementov v zvezdi neodvisna od kraja. Tak model je dober za opis razmeroma mladih zvezd, v katerih so ravnovesne jedrske reakcije ravno stekle. Pokaže se, da moramo študirati dva različna tipa: zvezde z veliko maso, katerih notranjost je dovolj vroča, da potekajo reakcije ogljikovega cikla in zvezde z manjšo maso (približno z maso Sonca), ki so hladnejše in v katerih potekajo reakcije p-p. Bistvena razlika med tema tipoma iz močno različnih temperaturnih odvisnosti C-N cikla in p-p cikla. Hitrost ogljikovega ciklusa mnogo hitreje raste s temperaturo kot reakcije p-p, kar je razvidno iz formul (2.19) in (2.20). Zato se zdi razumljivo, da je v zvezdah, kjer tečejo reakcije C-N cikla, aktivno jedro sorazmeroma manjše od aktivnega jedra bolj hladnih zvezd, kjer tečejo reakcije p-p. Če se spomnimo še, da zvezde z veliko maso mnogo močneje svetijo kot njihove manj masivne vrstnice (glej (1.21)), lahko verjamemo, da proizvodnja jedrske energije na **enoto prostornine** v masivnih zvezdah večja kot pri zvezdah z malo maso. ta razlika pa odloča o konvekcijskem ali sevalnem ravnovesju.

Pogoj za konvekcijsko stabilnost (1.25) lahko napišemo drugače, če izračunamo temperaturni gradient iz (1.19), $L(r)$ pa iz (1.3). Ko uporabimo še enačbo hidrostatičnega ravnovesja in oceno $M(r) \sim 4\pi r^3 \rho(r)/3$, dobimo:

$$\langle \varepsilon\rho \rangle_r \lesssim \frac{2\pi^2}{75} G \frac{m_p^2 c}{r_{cl}^2} \left(\frac{kT(r)}{\hbar c} \right)^3 \frac{\varkappa_T}{\varkappa(r)} \left[(2X + \frac{3}{4}Y + Z)(1+X) \right]^{-1}, \quad (3.1)$$

kjer je $\langle \varepsilon\rho \rangle_r = \frac{3}{4\pi r^3} \int_0^r \varepsilon(r')\rho(r') 4\pi r'^2 dr'$. V jedrih z veliko maso ta pogoj ni izpolnjen in zato teče konvekcija. Izven jeder pa člen na levi hitro pada, ker so aktivne sredice masivnih zvezd razmeroma majhne. Člen na desni pada dosti počasneje (blizu jedra je namreč temperatura še vedno visoka, zato je absorpcijski koeficient $\varkappa(r)$ enak in desna stran pada kot $T^3(r)$), tako da je že praktično na površini aktivnega jedra izpolnjen pogoj za sevalno ravnovesje.

Modeli take vrste zvezd se dobro ujemajo z opazovanji. Konvekcija v središču zvezde je tako uspešen mehanizem za prenos toplote, da je adiabatska aproksimacija (str. 12) za temperaturni gradient popolnoma zadovoljiva. Sevalno ravnovesje pa tudi dovolj dobro razumemo in kakršnihkoli fenomenoloških parametrov. Na naslednjem diagramu (1) so prikazani rezultati treh numeričnih homogenih modelov s konvektivnim jedrom (povzeto po R. S. Kushwaha: Ap. J. **125**, 242 (1957)):

Diagram 1

	$M/M_\odot$		
	10	5	2.5
X	0.9	0.9	0.9
Y	0.09	0.09	0.09
Z	0.01	0.01	0.01
T	20 000 K	15 400 K	9 800 K
$L/L_\odot$	3×10^3	290	21.2
$R/R_\odot$	3.4	2.4	1.6
T_j	19.5×10^6 K	17.4×10^6 K	15.2×10^6 K
ρ_j	4.62 g/cm^3	12.3 g/cm^3	32.4 g/cm^3
R_j/R	0.23	0.19	0.16
T_c	27.6×10^6 K	23.6×10^6 K	19.8×10^6 K
ρ_c	7.8 g/cm^3	19.5 g/cm^3	48.3 g/cm^3

Indeks c se nanaša na središče zvezde, indeks j pa označuje mejo konvekcijskega jedra, to je plast, kjer prenehajo jedrske reakcije.

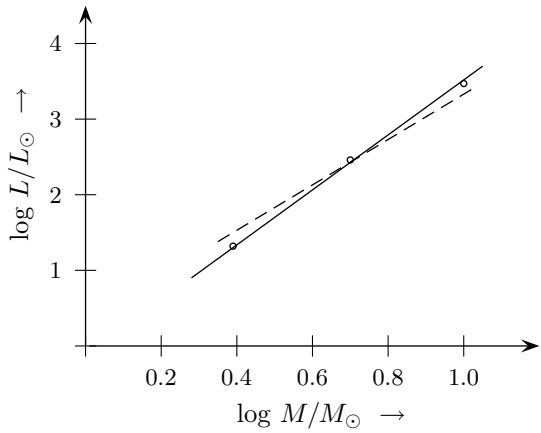
Rezultate teh modelov lahko v grobem razumemo takole: medzvezdni plin, ki se je začel krčiti pod vplivom lastne gravitacije, se segreva, kot smo videli v prvem poglavju (enačaba (1.16)). Ko doseže centralna temperatura dovolj visoko vrednost, stečejo jedrske reakcije, ki za razmeroma dolgo dobo uravnovesijo nadaljnje krčenje. Iz enačbe (1.5) lahko ocenimo centralno temperaturo v zvezdi z maso M in povprečno gostoto $\langle\rho\rangle$. Dobimo:

$$T_c \propto (M^2\langle\rho\rangle)^{1/3}. \tag{3.2}$$

Odtod vidimo, da bo masivna zvezda dosegla visoko temperaturo pri nižjih gostotah kot zvezda z malo maso. Ker pa je gostota masivnih zvezd manjša kot gostota zvezd z malo maso, mora v masivnih zvezdah temperatura v središču bolj narasti, da bi bila proizvodnja jedrske moči, ki je sorazmerna z gostoto, zadostna. Rezultati numeričnih modelov, ki so prikazani v gornjem diagramu (1) se lepo ujemajo s temi trditvami. Če vstavimo v enačbo (3.2) ρ_c namesto $\langle\rho\rangle$, je sorazmernost dobra na 3% za vse tri modele.

Ko primerjamo gornje tri modele, se lahko spomnimo enačbe (1.21), iz katere smo sklepali, da narašča izsev zvezde v grobem s tretjo potenco mase. Na sliki (sl. 3.1) smo na absciso nanesli log $M/M_\odot$ na ordinatno pa log $L/L_\odot$ za omenjene tri modele. Črtkana črta predstavlja "pričakovano" odvisnost $L \propto M^3$, polna črta, ki je najboljša premica skozi dane tri točke, pa ima strmino 3.5. Ujemanje z napovedjo je torej prav dobro (glej sliko), še posebej, če upoštevamo grobost izpeljave enačbe (1.21). Še več, razumemo lahko tudi to, da je eksponent pri masi večji od 3. Kot smo videli, imajo zvezde z večjo maso tudi večjo centralno oziroma povprečno temperaturo. To pomeni, da je prispevek prosto-proste absorpcije v teh zvezdah sorazmerno manjši (glej (2.30), (2.31)). Zato je povprečna absorpcija za bolj masivne zvezde manjša, izsev pa po (1.21) sorazmerno večji.

Drug tip homogenih modelov, o katerem smo govorili na začetku, pa je dober za opis zvezd, katerih masa ne presega mase Sonca. Iz sorazmernosti (3.2) vidimo, da se mora zvezda z majhno maso sorazmeroma zelo zgostiti, preden postane temperatura dovolj visoka, da lahko stečejo



Slika 3.1

jedrske reakcije. Za te lažje zvezde ja zato značilna lažja temperatura in višja centralna gostota. Pod temi pogoji pa proizvajajo jedrsko energijo reakcije med protoni. Temperaturna odvisnost teh reakcij je mnogo manj strma kot temperaturna odvisnost reakcij ogljikovega cikla (glej enačbi (2.19) in (2.20)). Zato je energijski izvor porazdeljen po precejšnjem delu notranjosti zvezde. Termonuklearna moč na enoto prostornine je razmeroma majhna in pogoj za sevalno ravnovesje (3.1) je izpolnjen v jedrih teh zvezd. V ovojnici pa je položaj ravno obrnjen. Ker so jedra razmeroma velika, leva stran v enačbi (3.1) le počasi pada proti površini. Drugače pa je z desno stranjo. Ker potekajo reakcije p-p pri razmeroma nizkih temperaturah in visokih gostotah, je glavni prispevek k absorpcijskemu koeficientu $\varkappa(r)$ prispevek prosto-prostega ali pa vezano prostega sipanja (glej str. 30). Po ocenah (2.30) in (2.31) je torej absorpcijski koeficient sorazmeren s $T^{-3.5}(r)$, desna stran pogoja (3.1) pa s $T^{6.5}(r)$. Desna stran zato pade pod levo v ovojnici, kjer se razvije konvekcija. Konvekcija vrhnjih plasti pa je zelo komplicirana, ker tam adiabatska aproksimacija odpove in si moramo pomagati s fenomenološko teorijo. Modeli za take vrste zvezd so zato še razmeroma grobi, njihove glavne lastnosti pa so naslednje: konvektivna ovojnica je razmeroma plitva in zajema do približno 10% mase zvezde. Debelina ovojnice ni močno odvisna od kemičnega sestava, masa ovojnice pa je tem večja, čim večja je koncentracija težkih elementov; rezultat, ki je razumljiv, ker težki

elementi močno zmanjšujejo prosojnost. Na enak način razumemo tudi dejstvo, da je centralna temperatura zvezde višja, če je v njej več težkih elementov. Iz sorazmernosti (3.2) lahko tudi sklepamo, da je centralna temperatura zvezde z večjo maso višja. Pokaže pa se, da je tudi centralna gostota bolj masivne zvezde večja (obratno kot pri prejšnjih modelih). To je posledica dejstva, da je konvektivna ovojnica zelo tanka in se s svojo debelino prilagaja različnim pogojem v notranjosti. S primernimi, na pogled kar realističnimi modeli atmosfer je mogoče doseči dobro ujemanje napovedi teh modelov z opazovanji. Ti modeli so dobri za opis zvezd v spodnjem delu glavne veje Hertzsprung-Russellovega diagrama.

V vseh do sedaj naštetih modelih je bila koncentracija težkih elementov (Z) 1%. Zato so igrali glavno vlogo pri absorpciji svetlobe prehodi elektronov iz vezanega v prosto stanje. Tak sestav zvezdne snovi je značilen za drugo generacijo zvezd (*population I*), to je za tiste zvezde, ki so nastale iz "pepela" zvezd prve generacije. Prva generacija zvezd (*population II*) - to so prve zvezde, ko so nastale v vesolju po veliki eksploziji - pa je bila verjetno sestavljena samo iz vodika in helija. Masivne zvezde prve generacije so že zdavnaj umrle, ker so zelo hitro trošile svojo energijo. Zvezde prve generacije z manjšo maso pa živijo mnogo bolj počasi in svetijo še danes. Zaradi odsotnosti težkih elementov so ovojnice teh zvezd bolj prozorne kot ovojnice njihovih ekvivalentov druge generacije. Taka zvezda mora zato proizvajati več jedrske energije, njena površinska temperatura pa je višja kot za enako zvezdo druge generacije. V Hertzsprung-Russellovem diagramu ležijo te zvezde pod glavno vejo - imenujejo se podpritlikavke in jih je najti med spiralnimi vejami v naši Galaksiji.

Poglavje 4

Končna faza razvoja zvezd

Od mnogih modelov zvezd, ki so bili izdelani v zadnjih letih so bomo ogledali samo še modele za končno fazo v razvoju, to je fazo, ko zvezda potroši vse možne izvore jedrske energije in preneha delovati kot pretvornik snovi. Razen tega, da se nam vprašanje: "Kaj se se zgodi z zvezdo čisto na koncu?" kar samo vsiljuje, ima študij končne faze še to privlačno lastnost, da ni pretežak.

V poglavju o relaksacijskih časih smo videli, da vlada v zvezdi, v kateri je snov v stanju idealnega plina, ravnovesje med toplotno in gravitacijsko energijo $E_T = -1/2E_g$ (1.16). Odtod sklepamo, da se mora zvezda, ki nima energijskih izvorov, neprestano krčiti. Polna energija zvezde $E_T + E_g$ namreč pada, ker vroča zvezda seva. Zveza $E_T = 1/2E_g$ pa pove, da se zvezda še bolj segreva na račun gravitacijske vezavne energije - zvezda se krči. Tako se zdi, da zvezda ne more priti v končno stacionarno stanje. Včasih pa je stacionarno stanje le mogoče, ker plin v zvezdi izgubi lastnost idealnega plina. Oglejmo si zato enačbo stanja za plin pri zelo velikih gostotah.

Če je gostota plina v zvezdi zelo velika, postane razdalja med delci primerljiva z njihovo comptonsko valovno dolžino $\lambda_c = h/mc$. To pa je znak, da se ne sme več zanemarjati kvantnih pojavov.

Kvantni pojavi se najmočneje pokažejo pri gibanju elektronov, ki so najlažji delci v zvezdnem plinu in imajo zato največjo comptonsko valovno dolžino $\lambda_e = 2.4 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$. Ta valovna dolžina je približno stokrat manjša od medatomskih razdalj v kristalih pri zemeljskih pogojih. Odtod ocenimo, da so kvantni pojavi pri elektronih pomembni, kadar je snov približno $(100)^3 = 10^6$ krat gostejša kot snov na Zemlji.

Za obnašanje elektronskega plina pri tako velikih gostotah je odločilno tako imenovano Paulijevo izključitveno načelo, ki pravi, da ne moreta biti dva elektrona v istem kvantnem stanju. Z drugimi besedami to pomeni, da lahko fazni prostor (šest razsežni fazni prostor z volumskim elementom $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}$) polnimo z elektroni le po celicah, katerih prostornina je h^3. V vsako celico smemo dati kvečjemu dva elektrona - enega s spinom "navzgor" in enega s spinom "navzdol".

Zaradi preprostosti si bomo ogledali samo popolnoma degeneriran Fermijev plin. To je plin v katerem so vse celice faznega prostora z nizko energijo napolnjene s po dvema elektronoma, vse celice z energijo, višjo od določene energije - Fermijeve energije - pa so prazne. Stanje takega plina je seveda osnovno stanje, saj ne moremo z nikakršno zamenjavo doseči, da bi bila celotna energija vseh elektronov v plinu še nižja. Obravnavali bomo torej plin pri temperaturi 0 K.

Iz povedanega sledi, da je število elektronov v prostornini (konfiguracijskega prostora) V enako:

$$N_e = 2\frac{\int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{p}}{h^3} = 2\frac{VU_f}{h^3}, \tag{4.1}$$

kjer je U_f prostornina momentnega prostora, ki je zaseden, to je

$$U_f = \frac{4\pi}{3}p_f^3. \tag{4.2}$$

Fermijeva energija pa je enaka

$$W_f = c\sqrt{(m_e c)^2 + p_f^2} - m_e c^2 \xrightarrow[p_f \ll m_e c]{} \frac{pf^2}{2m_e}.$$

Fermijevo gibalno količino lahko izrazimo z gostoto elektronov:

$$n_e = \frac{N_e}{V} = 2\frac{4\pi}{3}\frac{p_f^2}{h^3} \Longrightarrow p_f = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{\pi}n_e\right)^{1/3}. \tag{4.3}$$

Če hočemo dobiti enačbo stanja, moramo še izračunati notranjo energijo tega plina. To pa dobimo tako, da vsakemu delcu izračunamo energijo, nato pa vse te energije seštejemo. V elementu faznega prostora $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}$ je $2d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}/h^3$ elektronov, ki imajo energijo $W(p) = c\sqrt{(mc)^2 + p^2} - mc^2$. Zaradi preprostosti bomo izračunali energijo za dva ekstremna primera in sicer:

a) Če je $p_f \ll mc$ imamo opravka z nerelativističnim Fermijevim plinom. Takrat je $W(p) \approx p^2/2m$, notranja energija ne enoto prostornine pa je

$$w_n = \frac{1}{V} \iint W(p) 2 \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p}}{h^2} = \frac{4\pi}{mh^3} \frac{p_f^5}{5}. \tag{4.4}$$

b) V ultrarelativistični limiti je $p \gg mc$ in zato lahko vzamemo, da je $W(p) \approx cp$, od tod pa:

$$w_n = \frac{2\pi c}{h^3} p_f^4. \tag{4.5}$$

Iz gornjih izrazov lahko izračunamo tlak degeneriranega plina. V splošnem velja:

$$P = -\left(\frac{\partial w_n}{\partial V}\right)_S, \quad (W_n = V w_n).$$

V nerelativističnem primeru dobimo:

$$P_{\text{nerel.}} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{20 m_e} n_e^{5/3}, \tag{4.6}$$

v ultrarelativistični limiti pa:

$$P_{\text{ultrarel.}} = \frac{\pi h c}{24} \left(\frac{3}{\pi} n_e\right)^{4/3}. \tag{4.7}$$

Pri gornjih rezultatih sta pomembni dve dejstvi: prvo je to, da tlak ni odvisen od temperature in je različen od nič pri absolutni ničli. Zvezda se torej lahko ohladi in se ne krči, ker degeneriran elektronski plin kljubuje gravitaciji. Druga pomembna poteza pa je ta, da je tlak nerelativističnega degeneriranega plina sorazmeren z $\rho^{5/3}$, relativističnega pa z $\rho^{4/3}$. Po rezultatih poglavja o dinamičnem relaksacijskem času sledi, da je zvezda dinamično stabilna le, če vzdržuje tlak v njeni notranjosti nerelativistični degeneriran plin. Ravnovesje, ki bi zahtevalo tlak relativističnega degeneriranega plina, pa ne more biti stabilno.

S popolnejšim računamo je seveda mogoče obravnavati enačbo stanja za plin, katerega temperatura je različna od nič. Pokaže se, da sta enačbi stanja (4.6) in (4.7) dobri, dokler je temperatura plina dosti nižja od W_f/k. Če vpeljemo značilno gostoto za zvezdno snov, v kateri je elektronski plin

degeneriran: $\rho_0 = m_p/\lambda_e^3 = 1.17 \times 10^5\,\mathrm{g/cm^3}$, lahko napišemo pogoj za veljavnost enačbe (4.6) v obliki

$$kT \ll \frac{1}{2(4\pi)^2}\left(\frac{3}{2\pi}(1+X)\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3} m_e c^2.$$

Odtod je razvidno, da je elektronski plin pri gostotah $\sim 10^6\,\mathrm{g/cm^3}$ (normalne gostote belih pritlikavk) že degeneriran pri nekaj deset milijonih stopinj.

Do pred nekaj leti se je zdelo da je degeneriran elektronski plin najbolj nenavadna snov, ki jo lahko najdemo v zvezdah. Izkazalo se je, da obstajajo zvezde, v katerih je snov še bolj gosta - to so nevtronske zvezde. Če je namreč masa zvezde tako velika, da bi samo ultrarelativistični elektroni lahko vzdržali pritisk gravitacije, se začno jedrske reakcije in sicer se začno protoni "raztapljati" v nevtrone. Pri normalnih pogojih so najbolj stabilna tista jedra, ki imajo približno polovico nevtronov (Fe^{56}) - ta jedra so končni "pepel" nuklearnega gorenja v zvezdah. Če pa imajo elektroni zelo visoke energije, postane energijsko ugodno, da proton ujame elektron, se prelevi v nevtron in pri tem odda nevtrino,

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}. \tag{4.8}$$

Ta reakcija je obratna reakciji

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e},$$

ki jo lahko opazujemo v laboratoriju. Pri procesu raztapljanja "protonov" seveda izgubljamo elektrone in zato se tlak degeneriranega elektronskega plina zmanjšuje. Ker odnašajo nevtrini precej energije, se zvezdna snov ne more bistveno segreti in posledica tega je, da tlak ne more vzdržati pritiska gravitacije, zato se zvezda krči. Krčenje se lahko ustavi šele, kadar postane gostota nevtronov tako velika, da postanejo tudi ti degenerirani in ustvarijo, podobno kot prej elektroni, tlak degeneriranega nevtronskega plina. Vsi prejšnji izrazi so enaki, če le zamenjamo maso nevtrona namesto mase elektrona. Zvezda je spet "trda", če nevtroni niso ultrarelativistični.

Samega procesa "raztapljanja" protonov še ne razumemo prav dobro. Ne poznamo še dobro povprečne življenjske dobe protona v morju degeneriranih elektronov z dano Fermijevo energijo. Zato še ne vemo

gotovo, koliko časa tako raztapljanje traja. Nekatera dejstva pa kažejo, da je lahko tak proces zelo kratek. Izkazalo se je namreč, da lahko naredimo zelo dober model za eksplozijo supernove, če predpostavimo, da se zvezda zelo hitro krči, medtem ko se protoni raztapljajo. Pri tem lahko dobimo tudi nevtrine, ki imajo tako visoko energijo (energija nevtrinov je istega reda velikosti kot Fermijeva energija elektronov), da se jih del absorbira v ovojnici zvezde (sipalni presek za sipanje nevtrinov je proporcionalen s kvadratom njihove energije). Ti nevtrini močno segrejejo in odpihnejo ovojnico, kar vidimo kot eksplozijo supernove. Opisani model (Falk & Arnett, Ap. J., 1973) precej dobro prikaže časovni potek izseva supernove in da tudi dobro oceno za celotno energijo, ki se sprosti pri eksploziji. Zdi pa se, da na osnovi podatkov še ne moremo z gotovostjo trditi, da je to edini dober model. Če bi mogli izmeriti močan tok nevtrinov, ki bi prišel od eksplozije supernove, bi bil ta model že na precej trdnih temeljih. (V naši Galaksiji naj bi eksplodirala supernova v povprečju enkrat na sto let, vendar je videl zadnjo eksplozijo Kopernik l. 1604.)

Čeprav še ne vemo, kako poteka proces nevtronizacije snovi, pa že vemo, da obstajajo zvezde, ki so sestavljene skoraj izključno iz nevtronov. O njih bomo več povedali v naslednjem poglavju.

Modeli končnih stanj

Hitre faze na koncu razvojne poti zvezde še ne razumemo preveč dobro. Z analizo stabilnosti raznih možnih končnih stanj lahko ugotovimo le (če seveda predpostavljamo, da je naše poznavanje fizikalnih zakonov dovolj dobro tudi za razumevanje obnšanja snovi pod tako ekstremnimi pogoji, kot vladajo v teh zvezdah), da so mogoči samo trije tipi končnih stanj: bele pritlikavke, nevtronske zvezde in črne luknje. Končno stanje zvezde je odvisno od mase gostega jedra, ki ostane, ko se iztrošijo vsi jedrski izvori energije. Največja možna masa bele pritlikavke je okrog $1.2\,M_\odot$, za nevtronske zvezde je zgornja meja bolj negotova in znaša okrog $2\,M_\odot$. Vse zvezde, katerih masa je večja od okrog $2\,M_\odot$, bi se po dosedanjih računih morale sesuti pod vplivom lastne gravitacije in postati črne luknje.

Bele pritlikavke

Bele pritlikavke, ki jih opazujemo, imajo mase med $0.25\,M_\odot$ in $1\,M_\odot$. Temperatura na njihovem površju je normalno okrog 10 000 K, njihov

izsev pa je približno tisočkrat manjši kot izsev enako vročih zvezd z glavne veje v H-R diagramu. Spekter belih pritlikavk je navadno zalo podoben spektru črnega telesa, včasih pa so v njem tudi plitve in široke vodikove absorpcijske črte. Iz lege črt se da sklepati, da so na teh zvezdah precej močna magnetna polja z jakostjo od 10^2 do 10^4 Tesla. Domnevo o močnih magnetnih poljih podpira tudi dejstvo, da je svetloba od nekaterih belih pritlikavk delno cirkularno polarizirana.

Teoretični model belih pritlikavk je razmeroma preprost. Te zvezde so potrošile vso razpoložljivo jedrsko energijo in svetijo samo zato, ker trošijo še preostalo toplotno energijo. Iz majhnega izseva pri razmeroma visoki površinski temperaturi sledi, da je radij belih pritlikavk okrog stokrat manjši od kot radij Sonca. Odtod sklepamo naprej, da je gostota v notranjosti tako velika, da je elektronski plin degeneriran in le-ta preskrbi največji del tlaka.

Pogoje hidrostatičnega ravnovesja v notranjosti bele pritlikavke določa, kot smo že omenili, pritisk degeneriranega elektronskega plina. Kasneje bomo videli, da so temperature v notranjosti dovolj nizke, da je elektronski plin res skoraj popolnoma degeneriran in je zato tlak tega plina neodvisen od temperature. Srečna posledica tega dejstva pa je, da se enačbe zvezdne strukture razcepijo na dva neodvisna sistema - na enačbo hidrostatičnega ravnovesja in enačbe, ki opisujejo difuzijo toplotne energije na površje*. Edini zunanji parameter, ki nastopa v enačbi hidrostatičnega ravnovesja, je masa zvezde. Iz nje lahko računamo radij zvezde in gostoto v odvisnosti od oddaljenosti od središča. Numerični račun pokaže, da centralna gostota izredno hitro raste z maso, radij bele pritlikavke pa z njo pada. V tabeli 4.1.1 so prikazani nekateri rezultati takih računov. Če upoštevamo, da prideta dva nukleona na en elektron, lahko iz formule (4.3) izračunamo, da postane pri gostotah $\rho = 2 \times 10^6\,\mathrm{g/cm^3}$ elektronski plin že relativističen ($p_f c \sim m_e c^2 = 0.5\,\mathrm{MeV}$). Pri belih pritlikavkah, katerih masa presega $0.5\,M_\odot$ se torej v središču že poznajo relativistični efekti. Pri zvezdah z večjo maso pa postanejo ti efekti kmalu prevladujoči. Enačba stanja, ki velja v sredicah takih belih pritlikavk, je zato enačba (4.7). Videli pa smo, da je taka enačba stanja "mehka" in povzroča, da je zvezda nestabilna

*Težave bi se lahko pojavile, če atmosfera, v kateri elektronski plin ni degeneriran, ne bi bila dovolj tanka, ali pa, če bi imela preveliko maso. Numerični modeli pa pokažejo, da sta tako debelina kot masa atmosfere res precej manjši od radija oziroma celotne mase bele pritlikavke.

$M/M_\odot$	Gostota v središču (g/cm^3)	$R/R_\odot$
0.22	2.15×10^5	2×10^{-2}
0.50	1.82×10^6	1.38×10^{-2}
0.74	7.08×10^6	1.10×10^{-2}
1.08	5.25×10^7	7.08×10^{-3}
1.22	1.62×10^8	5.45×10^{-3}
1.33	1.95×10^9	2.95×10^{-3}

Tabela 4.1

proti radialnim oscilacijam. Kadar je Fermijeva energija elektronov večja kot 1.3 MeV, lahko že steče reakcija raztapljanja (4.8) elektronov:

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e},$$

ker pride s tem sistem v nižje energijsko stanje. V tem primeru se število elektronov zmanjša, prav tako pade njihov tlak, zato se zvezda skrči, gostota se poveča in s tem tudi verjetnost za reakcijo raztapljanja elektronov. Odtod vidimo, da masa bele pritlikavke ne more biti velja od okrog $1.2\,M_\odot$. Ta zgornja meja še ni natančno znana, ker še ne poznamo dobro presekov za reakcijo (4.8).

Svetloba, ki jo oddaja bela pritlikavka, je posledica ohlajanja vroče sredice. Degeneriran elektronski plin v sredici je izredno dober prevodnik toplote in zato je sredica praktično izotermna. Samo na površini je atmosfera nedegenriranih plinov, katerih debelina je manjša kot 1% radija zvezde. Če poznamo sestav atmosfere, lahko izračunamo njeno prosojnost in s tem temperaturo na površini v odvisnosti od temperature sredice. Zaradi majhnega izseva teh zvezd in zaradi neizrazitega spektra, je sestav zelo težko določiti. Prosojnost atmosfere lahko zato samo ocenimo in z negotovostjo za faktor, ki je manjši kot 5. Iz teh ocen sledi, da je temperatura v notranjosti belih pritlikavk, ki jih vidimo, nekaj deset milijonov stopinj. Ta podatek pove še to, da v notranjosti teh zvezd skoraj ni vodika. Če bi namreč obstajal, bi pri tako velikih gostotah in razmeroma visokih temperaturah tekla p-p reakcija s tako močjo, da bi se izsev belih pritlikavk bistveno zvečal.

Omenili smo že, da je za bele pritlikavke značilno tudi razmeroma močno magnetno polje, ki ga odkrijemo s tem, da merimo Zeemanove razcepitve spektralnih črt in polarizacijo svetlobe, ki prihaja z zvezde. To odkritje je trenutno še novo in se nanaša samo na nekaj belih pritlikavk, katerih svetlobo so dovolj natančno analizirali. Take meritve zahtevajo velik teleskop, veliko opazovalnega časa in spretnosti, ker je svetloba od belih pritlikavk zelo šibka, spekter pa neizrazit. Začetni rezultati so ohrabrujoči. Te rezultate smo omenili, ker so posebej pomembni za razumevanje naslednje zvrsti zvezd, ki si jo bomo ogledali, to so nevtronske zvezde.

Nevtronske zvezde in pulzarji

Nevtronske zvezde in pulzarje so najprej odkrili radioastronomi. Odkrili so radijske izvore, ki periodično oddajajo radijske valove v pulzih. Zaradi zelo natančne periode pulziranja so nekaj časa mislili, da gre za signale, ki nam jih pošiljajo inteligentna bitja z nekega drugega planeta. Zato so odkritje celo nekaj časa čuvali v tajnosti. Kasneje so našli še več takih izvorov. Natančnejše meritve, večje število pulzarjev (do danes jih poznamo 110) in njihova razprostranjenost po vesolju so ovrgli domnevo, o inteligentnih bitjih. Periode opazovanih pulzarjev so med nekaj sekundami in 3/100 sekunde. Trenutno najboljši model pulzarjev je zelo preprost. To naj bi bile zvezde, ki se vrte okrog svoje osi, v smeri, ki ni vzporedna z osjo vrtenja, pa imajo močno magnetno polje, ki "vžge" plazmo, kadar gredo mimo magnetni poli. Vrteča se zvezda sveti potemtakem tako kot svetilnik: čas med dvema pulzoma je v splošnem enak periodi vrtenja zvezde. Če je tak model res pravi, sledi, da mora biti vrteča se zvezda nevtronska zvezda, kajti vsako drugo zvezdo bi prav zagotovo razneslo, če bi se tako hitro vrtela.

Poskušali so narediti še drugačne modele za pulzarje. Dejstvo, ki ga je najtežje pojasniti, je visoka frekvenca utripanja. Če predpostavimo, da gre za podoben mehanizem kot pri kefeidah, lahko iz enačbe (1.14) izračunamo povprečno gostoto snovi v pulzarjih in dobimo okrog $10^{12}\,\mathrm{g/cm^3}$, kar nas zopet pripelje nazaj na nevtronske zvezde. Izkaže pa se, da bi bilo zelo težko najti mehanizem, ki bi dovoljeval radialne oscilacije. Študirali so tudi možnost, da bi bil na površini pulzarja maserski resonator. Karakteristična frekvenca pulziranja takega maserja bi bila določena približno z ekvatorskim obsegom pulzarja. Odtod dobimo, da bi moral biti radij pulzarja manjši od $\sim 3 \times 10^3\,\mathrm{km}$. Torej je pulzar vsaj razmeroma

težka bela pritlikavka. Zelo težko pa je pri tem modelu najti mehanizem, ki bi črpal veliko energije, ki jo oddaja pulzar v maserski resonator, pa tudi gostota energije v resonatorju bi bila nenormalno velika in bi že same izgube v resonatorju segrele atmosfero so tolikšne temperature, da bi opazili toplotno sevanje.

Najbolj znan pulzar je v Rakovi meglici. Za ta pulzar vemo, da je ostanek supernove, ki je eksplodirala l. 1054. Poročila o opazovanju te eksplozije so se ohranila v zapiskih kitajskih astronomov. Rakova meglica je od nas oddaljena okrog 1000 parsekov. Meglica je približno krogelna z radijem 1 parsek. Ko so primerjali fotografije te meglice za 70 let nazaj, so videli, da se širi s hitrostjo okrog 1/1000 parseka na leto, Če ekstrapoliramo linearno, ugotovimo, da bi meglica morala nastati l. 1150, ti pa je dokaj blizu l. 1054, ko je v resnici nastala. V sredini te meglice je pulzar, ki utripa s periodo 33 m. Izsev celotne meglice znaša okrog 10^{38} erg/s ($L = 4 \times 10^{33}$ erg/s v vidnem področju in 10^{35} erg/s v rentgenskem področju elektromagnetnega spektra). Perioda pulziranja se s časom polagoma veča in sicer so izmerili, da je

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = (2340\,\mathrm{let})^{-1}.$$

Našteti podatki se zaenkrat lepo ujemajo z opisano teorijo pulzarjev. Domnevo, da so za razumevanje pulzarjev zelo pomembna močna magnetna polja, podpira spekter sevanja, ki je tipičen spekter sinhrotronskega sevanja visokorelativističnih elektronov. Poleg tega je svetloba, ki prihaja s pulzarja in tudi iz meglice močno polarizirana, kar je lahko posledica magnetnega polja.

Daljšanje periode s časom si lahko razlagamo kot upočasnjevanje vrtenja zaradi zunanjih navorov, ki delujejo na nevtronsko zvezdo. Ti navori pridejo predvsem od interakcije okolne plazme z rotirajočim magnetnim poljem pulzarja (plazma ne more korotirati s pulzarjem, ker bi morala že na razdalji $r = c/\omega = 1.5 \times 10^3$ km krožiti s hitrostjo c, kar pa ni mogoče po teoriji relativnosti. Zato je polje nujno časovno odvisno proti plazmi.). Izgubljena rotacijska energija pulzarja se tako preseli v meglico, ki seva. Lahko vzamemo, da je izgube rotacijske energije pulzarja v enoti časa enaka izsevu meglice. Iz znane periode pulzarja, odvoda periode po času in iz znanega izseva meglice lahko izračunamo vztrajnostni moment pulzarja, nato pa lahko poiščemo med

modeli nevtronskih zvezd ravno tako, ki bo imela pravi vztrajnosti moment. Za pulzar v Rakovi meglici dobimo maso $M = 1.2\,M_\odot$ in radij 12 km. To so številke, ki so zelo razumne; masa je večja kot masa belih pritlikavk in manjša kot zgornja meja za maso nevtronskih zvezd ($\sim 2\,M_\odot$).

S tem smo našteli nekaj lastnosti pulzarjev in nekaj razlogov, ki govore v prid domnevi, da so pulzarji rotirajoče nevtronske zvezde. Ta teorija je danes splošno priznana kot najbolj zadovoljiva, čeprav še ni popolnoma dokazana. Raznih detajlov, kot je oblika pulza, majhni potujoči pulzi med dvema močnima pulzoma, itd., pa danes še ne znamo pojasniti.

Črne luknje

Na začetku tega poglavje smo omenili, da nevtronska zvezda ne more imeti večje mase kot približno $2\,M_\odot$. V nevtronski zvezdi z večjo maso so nevtroni relativistični , adiabatski indeks se približa vrednosti 4/3 in zvezda je nestabilna proti radialnim oscilacijam. Stabilnost bi lahko dosegli le, če bi se nevtroni spremenili v delce z veliko večjo maso, ki bi zopet tvorili nerelativističen degeneriran plin. Zaenkrat je naše razumevanje fizike elementarnih delcev še preskromno, da bi mogli ugotoviti, če takšna možnost obstaja ali ne. Lahko pa se vprašamo, ali eksistira enačba stanja, ki bi zagotavljala stabilnost zvezde z maso M, pri pogoju, da naj bo hitrost zvoka v taki snovi manjša od hitrosti svetlobe. Izkaže se, da je mogoče konstruirati take enačbe stanja le, če je M manjši kot $4 - 8\,M_\odot$. Za večje mase pa gravitacija vedno prevlada in stisne mase v vedno manjšo kroglico. Pravimo, da nastane črna luknja.

Podrobna razprava o črnih luknjah ne spada v okvir teh skript, ker je za to potrebno poznavanje splošne teorije relativnosti. Tukaj bomo samo našteli nekaj lastnosti črnih lukenj, ki sledijo iz splošne relativnosti. Če bi opazovali svetlobo, ki prihaja s površine zvezde, ki se krči, bi videli, da se vse spektralne črte pomikajo bolj proti rdečem delu spektra. To je posledica tako imenovanega gravitacijskega rdečega premika, ki nastane zato, ker foton troši energijo pri tem, ko zapušča področje močnega gravitacijskega polja. V zelo grobih obrisih bi lahko ta pojav opisali takole: Foton s frekvenco ν, ki se rodi v razdalji r od središča mase M ima proti neskončnosti energijo

$$E_{\rm fot}^{(\infty)} = h\nu - G\frac{M(h\nu/c^2)}{r},$$

kjer je drugi člen ravno vezalna energija fotona v gravitacijskem polju. Ko foton pobegne do neskončnosti, je zato njegova frekvenca $\nu^{(\infty)}$ manjša kot frekvenca ob rojstvu. Foton, ki je rojen na radiju $r = GM/c^2$ pride tako do neskončnosti ravno brez energije in ga zato ne moremo zaznati. Zvezda, katere radij je manjši kot GM/c^2, je torej za nas nevidna, ker noben foton z njene površine ne more priti do nas. Seveda pa ne more priti s te površine do nas noben drug delec, saj so vsi delci z maso počasnejši od fotona. Tako zvezdo imenujemo zato črna luknja.

Gornje plavzibilno sklepanje pa seveda ni pravilno, ker smo predpostavili, da vedno velja Newtonov gravitacijski zakon, za "maso" fotona pa smo vzeli kar energijo fotona deljeno s c^2, s čimer smo zlorabili slavno Einsteinovo formulo $E = mc^2$. Kljub hudim grehom pa je naš rezultat narobe samo za faktor 2. S pravilnejšim računom v okviru splošne relativnosti dobimo, da je zvezda z maso M črna luknja, če je njen radij enak

$$r_{\text{Schw.}} = \frac{2GM}{c^2}. \tag{4.9}$$

Indeks Schw. pomeni, da gre za Schwarzschildov radij. Schwarzschild je bil namreč prvi, ki je odkril take rešitve Einsteinovih enačb. Schwarzschildovega radija si ne smemo predstavljati kot nekega fizikalno merljivega radija, ki bi ga merili iz središča črne luknje, saj sploh ne bi mogli nikdar priti ven, ampak kot radij, ki določa "površino" črne luknje:

$$A = 4\pi r_{\text{Schw.}}^2. \tag{4.10}$$

Če bi se Sonce sesulo v črno luknjo, bi bil njegov radij 1.47 km.

Vprašamo se, ali obstajajo črne luknje v vesolju in na kakšen način bi jo lahko zaznali. Zaznavanje črnih lukenj predstavlja izredno težak problem, zato ker so tako majhne in ker ne sevajo lastne svetlobe. Možnost je v tem, da jih spoznamo po motnjah, ki jih povzročajo v gibanju ostalih zvezd, Tudi ta možnost je precej omejena, ker je potrebno, da izmerimo mase zvezd, ki se gibljejo v skupnem gravitacijskem polju in da se prepričamo, da kandidat za črno luknjo ni le zvezda z majhnim izsevom, ki je ne vidimo zaradi velikega izseva ostalih zvezd v sistemu. Najbolj ugodna konfiguracija, v kateri morda lahko opazimo črno luknjo je, če se le-ta nahaja v dovolj tesnem paru z rdečo velikanko. Redka atmosfera velikanke zalije njeno gravitacijsko potencialno jamo in se

začne pretakati v potencialno jamo črne luknje. Zaradi kroženja obeh zvezd okoli skupnega težišča se začno ti plini v spirali spuščati proti površini črne luknje in ustvarijo okrog nje obroč, ki je nekoliko podoben Saturnovemu obroču, le da so hitrosti plinov v tem obroču izredno visoke, zaradi močnega gravitacijskega polja črne luknje. Ker se hitrost kroženja povečuje, ko se približujemo črni luknji, pride do trenja med različnimi kolobarji obroča, to pa segreje pline do tako visokih temperatur, da sevajo rentgensko svetlobo. Zaradi turbulence v obroču se pojavijo področja z višjo in nižjo temperaturo, ki krožijo s plazmo vred. Rentgenska svetloba, ki jo sprejmemo na Zemlji, zato utripa, frekvenca utripanja pa nam da oceno za frekvenco kroženja. Iz frekvence kroženja pa lahko ocenimo radij tira po katerem se giblje vroča gmota ($r \sim c/\nu$). Če ugotovimo, da je radij dovolj majhen, in da je masa nevidne zvezde večja kot nekaj Sončnih mas ($\sim 10\,M_\odot$ ali več), smatramo, da imamo opravka s črno luknjo. Zaenkrat so dovolj natančno izmerili en sam izvor rentgenskih žarkov v Labodu (*Cygnus X-1*), da lahko s precejšnjo gotovostjo trdijo, da dvojna zvezda ustreza gornjemu opisu. "Na sumu" pa imajo še nekaj izvorov rentgenskih žarkov, vendar podatki niso tako zanesljivi. Poudariti velja, da s tem, da izvor ustreza našemu opisu črne luknje, identifikacija še ni popolna, saj obstajajo morda objekti, ki se iz nam še neznanih razlogov tako čudno vedejo.

Za astrofizika črna luknja ni samo eno izmed končnih stanj zvezde, ampak se v zvezi z obstojem črnih lukenj postavlja vrsta osnovnih vprašanj. Kaj se zgodi z maso, ki pade v črno luknjo? Teoretiki dokazujejo, da taka masa izgubi svojo identiteto. Vse kar lahko razberemo iz zunanjega polja črne luknje je množina mase, ki je padla vanjo, naboj in vrtilna količina vseh delcev, ki so tvorili črno luknjo. Ostale karakteristike delcev, kot je leptonsko število, barionsko število, čudnost, itd., pa se popolnoma izbrišejo. Ali je usoda vse snovi v vesolju, da bo končno padla v črne luknje? Če je tako, bo nekoč vesolje ob svojo sedanjo identiteto in bo morda lahko začelo novo razvojno pot popolnoma znova z drugačnimi elementarnimi delci in z drugačnimi osnovnimi interakcijami. To so vprašanja, ki burijo duhove najbolj drznih teoretikov. Narejenih je bilo nekaj grobih kozmoloških modelov, ki poskušajo razjasniti tovrstna vprašanja. Število teh modelov je premajhno, število predpostavk za vsak model pa preveliko, da bi lahko dajali kakršnekoli odgovore. Zelo pa so potrebni tudi novi eksperimentalni podatki, ki bi z večjo gotovostjo potrdili ali zanikali obstoj črnih lukenj. Astronomija gravitacijskih valov, se ravno sedaj rojeva, nam

obeta nova odkritja v tej smeri.