

Astronomija 1

Vaje

Dodatne vaje in nasveti:

Poleg vaj, ki smo jih reševali, so v dokumentu prisotne še dodatne vaje z rešitvami (na katere vas sproti opozarjam) ter nekaj nasvetov kje poiskati dodatno gradivo.

Podatki:

$$R_{\odot} = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$G = 6.7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2$$

$$L_{\odot} = 3.9 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

$$\bar{\rho} \simeq 1 \text{ g/cm}^3$$

V vajah označujemo solarno konstanto z j_z ali j_{\oplus} . Količine, ki so povezane z lastnostmi Sonca, pa imajo oznako \odot .

Morebitne napake sporočite na:
dunja.fabjan@fmf.uni-lj.si

1. Privzemimo, da spremeni Sonce 0.8% svoje mase v energijo. Izračunaj zgornjo mejo za starost Sonca. Predpostavi, da je izsev L_\odot ($3.9 \cdot 10^{26}$ W) ostal konstanten v času.

$$E = 1.4 \cdot 10^{45} J, t \simeq 10^{11} \text{ let}$$

2. Solarna konstanta (gostota svetlobnega toka na razdalji Zemlje) meri $j_z = 1370 \text{ W m}^{-2}$. Kolikšna je gostota svetlobnega toka na Soncu (j_\odot), ko je njegova navidezna velikost $\theta = 32''$?

$$j = 6.3 \cdot 10^7 \text{ W m}^{-2}$$

3. Nekatere teorije trdijo, da bi naj bila efektivna temperatura Sonca nekoč okrog $5000 K$ in radij dva procenta večji od sedanjega ($R = 1.02 R_\odot$). Koliko je veljala solarna konstanta tedaj? Predpostavi, da se orbita Zemlje ni spremenila.

$$j_z(t_1) = 787.2 \text{ W m}^{-2}$$

4. Nam najbližja zvezda (poleg Sonca) se nahaja na razdalji 1.3 pc. Kolikokrat manjša (v primerjavi s Soncem) je zato gostota njenega svetlobnega toka na Zemeljski površini? Predpostavi, da je izsev te zvezde enak Sončevemu!

$$j_z/j_\star = 7 \times 10^{10}$$

5. Izračunaj razdaljo od Venere od Zemlje v trenutku, ko je Venera videti najsvetlejša. Svetlost Venere je premo sorazmerna projekciji osvetljenega Venerinega površja, ki ga vidimo na Zemlji. Izračunaj tudi kolikšna je takrat kotna razdalja α med Soncem in Venero, kot ju vidimo z Zemlje. Izračunaj še elongacijo Venere (ε). Predpostavi, da sta orbiti Venere in Zemlje okrog Sonca krožni. Razdalja Venere od Sonca: $d_v = 0.723 \text{ a.e.}$. Razdalja Zemlje od Sonca: $d_z = 1 \text{ a.e.}$

$$d = 0.43 \text{ a.e.}; \alpha = 118^\circ; \varepsilon = 40^\circ$$

6. V zvezdi z maso $M = m(R)$ se gostota spreminja z radijem r po zvezi:

$$\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (1)$$

kjer je ρ_c vrednost gostote v središču in R radij zvezde.

- (a) Izrazi odvisnost mase od radija, $m(r)$.
- (b) Izračunaj $M = m(R)$.
- (c) Pokaži, da je povprečna gostota zvezde $0.4 \rho_c$.

a) $m(r) = 4\pi\rho_c \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right)$,

b) $M = m(R) = \frac{8}{15}\pi\rho_c R^3$,

c) Iz definicije $\bar{\rho} = \frac{M}{4/3\pi R^3}$ sledi, da je $\bar{\rho} = 0.4 \rho_c$.

7. Kako bi se spremenjal tlak skozi zvezdo z $\rho(r) = \bar{\rho}$ in kako, če bi se gostota spreminja z radijem po prejšnji definiciji? Izračunaj središčni tlak v obeh primerih.
- $p_c = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$
 - $p_c = \frac{15GM^2}{16\pi R^4}$
8. Kako bi se spremenjal tlak skozi zvezdo z radijem enakim Sončevemu, če bi gostota padala linearno z razdaljo od središča zvezde? Kolikšen bi bil središčni tlak? Kolikšna bi bila v tem primeru gravitacijska energija?

$$p_2 - p_1 = -4\pi G \rho_c^2 \left[\frac{r^2}{6} - \frac{7r^3}{36R} + \frac{r^4}{16R^2} \right]_{r_1}^{r^2}, \quad p_c = \frac{5GM^2}{4\pi R^4}, \quad W_g = -G \frac{26M^2}{35R}$$

9. Analitično reši Lane-Emdejevo enačbo za primer $n = 0$ in izračunaj x_1 in $M(R)$.

$$\theta(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2, \quad x_1 = \sqrt{6}, \quad M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_c$$

• **Dodatna vaja:**

Analitično reši Lane-Emdejevo enačbo za primer $n = 1$ (uporabi $\chi = x\theta$ in poenostavi enačbo), ter izračunaj x_1 in $M(R)$.

$$\theta(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x_1 = \pi, \quad M = \frac{4R^3}{\pi} \rho_c.$$

10. Privzemite, da homogeni zvezdi z maso M zmanjka jedrskega goriva in izračunajte kako hitro se krči, če ohranja konstanten izsev L . V kolikšnem času bi se radij zvezde podobne Soncu skrčil za 10%?

Hitrost krčenja pri konstantnem izsevu je $\frac{dR}{dt} = -\frac{R/\tau}{(1+T/\tau)^2}$, kjer je $\tau = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{LR}$. Za zvezdo podobno Soncu je $\tau = 10^7$ let. Radij zvezde bi se skrčil za 10% v času $t \simeq 10^6$ let.

11. Uporabi enačbo hidrostatičnega ravnovesja in oceni debelino Zemljine atmosfere. Pri tem upoštevaj $M_{Zemlje} = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R_{Zemlje} = 6400$ km, gostota zraka pri tleh $\rho = 1.27$ kg m⁻³, tlak pri tleh $p_0 = 10^5$ Pa.

$$h \simeq 8000 \text{ km.}$$

• **Računanje z utežnimi razmerji**

Glej skripto "Fizika zvezd", A. Čadež (str. 18) ter knjigo "An introduction to Modern Astrophysics", B.W.Carroll in D.A. Ostlie (poisci *mass fraction*).

12. Sipalni presek za nevtrine zapišemo kot $\sigma = 2 \cdot 10^{-44} \left(\frac{E_\nu}{m_e c^2}\right)^2 \text{cm}^2$, kjer je $E_\nu = 15 \text{ MeV}$ in $m_e c^2$ mirovna energija elektrona. Naj imajo nevtrini, ki so nastali pri eksploziji supernove, energijo 15 MeV. Primerjaj proste poti teh nevtrinov v Soncu, beli pritlikavki in v nevronski zvezdi, če za gostoto snovi slednjih vzameš sledeče vrednosti $\rho_\odot = 1 \text{g/cm}^3$, $\rho_{wd} = 10^6 \text{g/cm}^3$, $\rho_{ns} = 10^{15} \text{g/cm}^3$. (Upoštevaj, da so $\mu_\odot = 0.60$, $\mu_{wd} \simeq 2$ in $\mu_{ns} \simeq 2$).

$$l_\odot = 5.8 \cdot 10^{11} \text{ km}, l_{wd} = 2 \cdot 10^6 \text{ km}, l_{ns} = 2 \text{ m}.$$

13. Medvezdni oblak vodika vsebuje 10 atomov na cm^3 . Kako velik mora biti, da se sesede? Temperatura oblaka je 100 K.

$$R = 21.6 \text{pc.}$$

14. Zvezde nastajajo v gručah iz ogromnih oblakov plina in prahu. Oceni, koliko zvezd bo nastalo iz oblaka s premerom 10pc, če je v vsakem cm^3 plina 8 atomov vodika in 2 atoma helija. Kolikšna še sme biti temperatura plina, da se bo oblak zaradi lastne teže sesedel? Oceni tudi, koliko časa bo sesedanje trajalo. Masa vodikovega jedra je $1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$, Boltzmannova konstanta pa je $1,38 \cdot 10^{-23} \text{J/K}$.

$$N \simeq 1650; T = 55,4 \text{ K}; t = 1.6 \cdot 10^7 \text{ let.}$$

15. Za koliko se skrči Sonce v enem letu, če sveti zaradi krčenja? Kolikim ločnim sekundam bi to ustrezalo, če gledamo z Zemlje? Upoštevaj, da je $L = 3.9 \cdot 10^{26} \text{ W}$, $R_\odot = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$ in $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

$$\Delta R = 22.8 \text{ m}, \theta = 3 \cdot 10^{-5}''$$

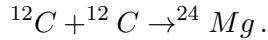
16. Upoštevaj zvezdo z maso $M = 10 M_\odot$, ki jo sestavlja popolnoma ioniziran ogljik, ^{12}C . Njena središčna temperatura je $T_c = 6 \times 10^8 \text{ K}$ (središčna temperatura Sonca je $T_{c,\odot} = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$).

- (a) Kolikšna je povprečna masa delca v enotah m_H (μ)?
- (b) Uporabi plinsko enačbo za idealni plin in virialni teorem da zapišeš kako se radij zvezde spreminja z njeno maso M , povprečno maso delca $\bar{\mu}$ in središčno temperaturo T_c . Izračunaj radij zvezde in ga izrazi v Sončevih radijih.

• **Dodatna naloga:**

Izsev zvezde je $10^7 L_\odot$. Kolikšna je njena efektivna površinska temperatura?

- (c) Recimo, da proizvaja zvezda energijo preko reakcije



Atomska masa ^{12}C je 12, ^{24}Mg pa 23.985. Kolikšen del mase zvezde se bo spremenil v termično energijo?

- (d) Koliko časa bo trajalo, da bo zvezda porabila 10% svojega ogljika?

17. Ocenite najmanjšo razdaljo, na katero se dva protona približata, če se gibljeta naravnost drug proti drugemu, pri temperaturi plina $T = 5000$ K oz. $T = 10^7$ K. Kaj lahko sklepatе o jedrskih reakcijah?

• **Dodatno vprašanje:**

Kolikšna bi morala biti temperatura, da bi se proton približal na tipično jedrsko razdaljo $1\text{fm} = 10^{-15}\text{ m}$?

$$r_{min} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}, r_{min} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

18. Izračunaj čas izgorevanja vodika v dveh zvezdah na spodnjem oziroma zgornjem delu glavne veje. Za prvo upoštevaj $M = 0.072M_\odot$, $\log(L/L_\odot) = -4.2$, za drugo pa $M = 85M_\odot$ in $\log(L/L_\odot) = 6$. Upoštevaj, da je izkoristek pretvorbe vodika v helij 7 promilov. Za nekonvektivno zvezdo pri reakcijah sodeluje le 10% mase, za konvektivno pa celotna masa zvezde.

• **Dodatno vprašanje:**

Primerjaj čas izgorevanja obeh s starostjo vesolja! Kaj lahko sklepaš?

$$t_{0.072M_\odot} = 1,5 \cdot 10^{14} \text{ let}, t_{85M_\odot} = 9 \cdot 10^5 \text{ let}$$

19. Kroglasta kopica M13 v ozvezdju Herkula vsebuje približno $5 \cdot 10^5$ zvezd s povprečno maso približno polovico Sončeve.

- (a) Ali je lahko kopica nastala, ko je bilo vesolje dovolj hladno za nastanek nevtralnega vodika in helija ($X = 0.75$, $Y = 0.25$)? Gostota in temperatura vesolja sta takrat bili $\rho \simeq 10^{-18} \text{ kg m}^{-3}$ in $T \simeq 3 \cdot 10^3 \text{ K}$.

(b) **Dodatno vprašanje:**

Ali lahko iz HR diagrama (na drugi strani lista) oceniš koliko je starla kopica? Pri tem upoštevaj, da ima Sonce indeks $B - V = 0.65$ in navidezno magnitudo $m_V = -26.74$. Predpostavi, da se na glavni veji le desetina mase spremeni v helij in da se pri tem sprosti 7 promilov mirovne energije. Je to zgornja ali spodnja meja za starost kopice?

$$M_{kopice} > M_J, \text{ kjer je } M_J = 2,4 \cdot 10^5 M_\odot$$

20. Novonastala kroglasta kopica ima skupno maso $10^6 M_\odot$. Za zvezde z masami med 0.1 in $20 M_\odot$ velja, da je število zvezd z masami v intervalu med m in $m + dm$ enako $\frac{dN}{dm} = a \cdot m^{-2.35}$, kjer je m masa zvezde izražena v Sončevih masah, $m = \frac{M}{M_\odot}$.
- (a) Izračunaj konstanto a .
 - (b) Kolikšen je celoten izsev kopice? Kolikšnemu delu celotnega izseva prispevajo zvezde z masami nad $5 M_\odot$?
 - (c) Kolikšna je povprečna masa zvezde v kopici?
 - (d) Kolikšen je celoten izsev kopice po milijardi let? Privzemi, da preživi zvezda z maso $1 M_\odot$ na glavni veji 10 milijard let in da se življenjski čas zvezd na glavni veji spreminja z M^{-2} .