Izpitne teze iz elektromagnega polja
Zadnja verzija - November 2006.

Na vprašanja odgovarjajte kratko in se držite zgolj tega, po čemer se vprašuje in ne pozabite napisati **bodisi imena bodisi imatrikulacijske številke**. Ne pozabite definirati **vseh** količin in simbolov, ki jih uporabljate v odgovorih! Izpeljava mora vsebovati vse pomembne korake od prvega do zadnjega. Kateri so ti, naj študent oz. študentka ocenita na osnovi svojega razumevanja snovi. Nizanje enačb brez kakršnegakoli komentarja se **ne šteje** za pravilen odgovor, tudi če so enačbe same po sebi zapisane pravilno!

Prvi del:

1. Zapiši prvi dve Maxwellovi enačbi za statično električno polje, zapiši enačbo silnice tega polja in izpelji Poissonovo enačbo.
2. Naštej nekaj porazdelitev električnoh nabojev in izpelji velikost pravokotne komponente jakosti električnega polja v primeru površinske porazdelitve nabojev.
3. Zapiši rešitev Poissonove enačbe za točkast naboj in izpelji ustrezno obliko Greenove funkcije.
4. Izpelji elektrostatsko energijo porazdelitve nabojev v zunanjem električnem potencialu.
5. Izpelji lastno elektrostatsko energijo polja in jo zapiši s pomočjo skalarnega potenciala in s pomočjo jakosti električneg polja.
6. Izpelji silo na porazdelitev nabojev v obliki, ki vsebuje napetostni tenzor električvnega polja ter izračunaj a.) silo med dvema enakima in b.) nasprotnima točkastima nabojema na razdalji D.
7. Izpelji multipolni razvoj električnega potenciala do drugega reda, definiraj ustrezni dipolni moment in zapiši potencial in polje točkastega dipola.
8. Izpelji multipolen razvoj elektrostatske energije do drugega reda in od tod izraza za silo in navor na točkast dipol v zunanjem elektrostatskem polju.
9. Definiraj gostoto toka in jo zapiši v primeru toka po žici in v primeru gibanja zvezno porazdeljenih nosilcev naboja v prostoru.
10. Zapiši zvezo med gostoto magnetnega polja in gostoto toka in povej ter izpelji kakšne so silnice za oba vektorja.
11. Vpelji vektorski potencial gostote magnetnega polja in izpelji vektorsko Laplaceovo enačbo oz. Kirchhoffovo enačbo, ki povezuje magnetni potencial z gostoto toka.

12. Izpelji in zapiši vektorski potencial znotraj in zunaj tuljave. Z besedami opiši, kako lahko magnetni potencial zunaj tuljave eliminiramo skoraj povsod v prostoru, razen na Diracovi struni.

13. Izpelji Biot - Savartov zakon za magnetno polje zvezne porazdelitve gostote toka ter od tod izpelji magnetno polje ravnega vodnika.

14. Izpelji izraz za magnetno energijo porazdelitve gostote tokov v zunanjem vektorskem potencialu in z besedami opiši, kako se izpeljava lastne energije magntenga polja loči od analogne izpeljave v primeru električnega polja.

15. Izpelji magnetno energijo polja s pomočjo vektorskega potenciala in s pomočjo gostote magnetnega polja.

16. Izpelji magnetno silo na porazdelitev gostote tokov v prostoru s pomočjo tenzorja napetosti magnetnega polja.

17. Izpelji silo na porazdelitev gostote toka v obliki, ki vsebuje napetostni tenzor magnetnega polja ter izračunaj silo med dvema ravnima vodnikoma dolžine L na razdalji D, po katerih teže tok v a.) isti in b.) smeri.

18. Izpelji multipolni razvoj za vektorski potencial porazdelitve gostote toka in definiraj uztrezen magnetni dipolni moment.

19. Izpelji in zapiši vektorski potencial in gostoto magnetnega polja za točkast magnetni dipol ter opiši Amperovo ekvivalenco.

20. Izpelji multipolni razvoj magnetne energije in od tod še silo in navor na magnetni dipol.

21. Zapiši Maxwellove enačbe v primeru kvazistatiňih polja in pokaži, da ustrezajo zaključenim silnicam gostote toka.

22. Izpelji povezavo med jakostjo električneg polja in obema potencialoma. Od tod izračunaj še rotor električnega polja. Kaj dobiš?

23. Zapiši Ohmov zakon za gostoto toka in od tod izpelji, kakšno mora biti električno polje v prevodniku in kakšen potencial na njegovi površini.

24. Iz preproste mikroskopske slike izpelji makroskopski Ohmov zakon. Čemu je v tej sliki enaka ohmska prevodnost?

25. Iz Ohmovega zakona izpelji izraz za ohmsko upornost vodnika.

26. Izpelji izraz za disipacijo energije pri električnem toku skozi ohmski prevodnik.

27. Zapiši osnovne enačbe kožnega pojava, njihove rešitve v primeru cilindričnega vodnika in jih komentiraj. Kakšni sta limiti kompleksne impedance za a.) majhne in b.) velike frekvence.

28. Zapiši Maxwellove enačbe v vakuumu in iz njih izpelji enačbo za ohranjevanje naboja.
29. Izpelji ohranitveni zakon za energijo elektromagnetnega polja v vakuumu. Kdaj se energija elektromagnetnega polja ohranja?
30. Izpelji zakon o ohranjevanju gibalne količine elektromagnetnega polja in zapiši ter povej, kdaj velja Einstein - Poincaréjev zakon.
31. Definiraj vezan naboj, vektor polarizacije, električno susceptibilnost in zapiši električno polje v snovi.
32. Pokaži, da je vektor polarizacije enak gostoti dipolnega momenta v snovi.
33. Definiraj vezano gostoto toka, vektor magnetizacije, magnetno susceptibilnost in zapiši magnetno polje v snovi.
34. Pokaži, da je vektor magnetizacije enak gostoti magnetnega dipolnega momenta v snovi. Kaj to pomeni, če upoštevaš še Amperovo ekvivalenco?
35. Zapiši Maxwellove enačbe v snovi in ustrezne konstitutivne relacije za električno in magnetno polje.
36. Izpelji robne pogoje za Maxwellove enačbe na meji dveh snovi.

Drugi del:

1. Zapiši časovno nelokalno zvezo med vektorjem polarizacije in vektorjem jakosti električneg polja v snovi v realnem in v Fourierovem prostoru in definiraj dielektrično funkcijo v realnem in v Fourierovem prostoru. Kaj pomeni njena imaginarna komponenta?
2. Naštej in opiši najpomembnejše analitične lastnosti dielektrične funkcije v Fourierovem prostoru in izpelji Kramers - Kronigove relacije.
3. Izpelji disipacijo energije v primeru frekvenčno odvisne dielektrične funkcije.
4. Zapiši osnovno enačbo Debyejevega modela dielektrične relaksacije in od tod izpelji realno in imaginarno komponento dielektrične funkcije v odvisnosti od frekvence zunanjega polja.
5. Zapiši osnovno enačbo Lorentzovega modela dielektrične relaksacije in od tod izpelji realno in imaginarno komponento dielektrične funkcije v odvisnosti od frekvence zunanjega polja.

6. Zapiši osnovno enačbo plazemskega modela dielektrične relaksacije in od tod izpelji realno in imaginarno komponento dielektrične funkcije v odvisnosti od frekvence zunanjega polja.

7. Opiši in nariši osnovne lastnosti dielektričnega odziva vode v celotnem frekvenčnem območju.

8. Izpelji zvezo med frekvenčno odvisno dielektrično funkcijo in frekvenčno odvisno prevodnostjo vodnika.

9. Zapiši Lorentzovo umeritev in pokaži, da mora umeritvena funkcija zadoščati valovni enačbi.

10. Izpelji Riemann - Sommerfeldove enačbe v Lorentzovi umeritvi.

11. Zapiši retardirane EM potenciale in dokaži, da zadoščajo Riemann - Sommerfeldovim enačbam.

12. Izpelji Lienard - Wiechertova potenciala za gibajoči se naboj.

13. Izpelji bližnje elektromagnetno polje gibajočega se naboja.

14. Izpelji EM potenciala časovno spremenljivega dipola v limiti velikih razdalj.

15. Izpelji električno in magnetno polje časovno spremenljivega dipola v limiti velikih razdalj.

16. Izpelji radialni del Poyntingovega vektorja za radiacijska polja časovno spremenljivega dipola.

17. Izpelji izsevano moč časovno spremenljivega dipola.

18. Izpelji Lagrangeovo funkcijo nabitega delca v zunanjem EM polju.

19. Dokaži, da je Lagrangeova funkcija nabitega delca v zunanjem EM polju invariantna na umiritveno transformacijo.

20. Izpelji Hamiltonovo funkcijo nabitega delca v zunanjem EM polju.

21. Zapiši Lagrangeovo funkicjo EM polja in njegovih izvorov in od tod izpelji Riemann - Sommerfeldovo enačbo za a.) skalarni in b.) za vektorski potencial.

22. Izpelji Lorentzovo transformacijo s pomočjo vrteža v štirih dimenzijah, zapiši Lorentzovo matriko in dokaži, da je valovna enačba invariantna na Lorentzovo transformacijo.

23. Kaj je to štirivektor, kaj so njegove a.) ko- oziroma b.) kontravariantne komponente in kako se le-te Lorentzovo transformirajo?

24. Definiraj lastni čas in dokaži, da je invarianten na Lorentzovo transformacijo.

25. Iz Lorentzove transformacije izpelji transformacijske enačbe trodimenzionalnega vektorja hitrosti.

26. Definiraj štirivektor gibalne količine, opiši njegovo četrto komponento in pokaži, da je pravokoten na štirivektor sile.

27. Definiraj štirivektor EM potenciala , zapiši kovariantno nujo nabitega delca v zunanjem EM polju in ustrezne Euler - Lagrangeove enačbe.

28. Definiraj štirivektor gostote toka in dokaži, da je Schwartzschildova invarianta res invariantna na Lorentzovo transformacijo.

29. Zapiši Riemann - Sommerfeldove enačbe v kovariantni obliki in izpelji zvezo med kontinuitetno enačbo in Lorentzovo umeritvijo.

30. Vpelji a.) kovariantne in b.) kontravariantne komponente tenzorja EM polja in zapiši njegove komponente v obliki matrike.

31. Izpelji izraz za kvadrat dolžine tenzorja EM polja. Kakšen pomen ima dobljeni rezultat?

32. Izpelji prvi dve Maxwellovi enačbi iz definicije tenzorja EM polja.

33. Za poljubni prvi indeks (vzemi 1,2,3, ali 4) pokaži, da Maxwellove enač be zapisane s pomočjo tenzorja EM polja sovpoadajo z njihovo standardno obliko.

34. Zapiši "kinematični" Maxwellovi enačbi s pomočjo tenzorja EM polja.

35. Izpelji kovariantno obliko Lorentzove sile ter na osnovi tega vpelji štiritenzor napetosti EM polja in zapiši njegove komponente v matrični obliki.

36. Pokaži, da prostorske komponente štiritenzorja napetosti sovpadajo s komponentami napetostnega tenzorja EM polja.

37. Pokaži, da prostorsko-časovne komponente štiritenzorja napetosti sovpadajo s Poyntingovim vektorjem EM polja in da časovno-časovna komponenta sovpada z gostoto energije EM polja.

38. Katere ohranitvene zakone dobimo iz divergence štiritenzorja napetosti EM polja?

Maxwellovi enačbi:

II. $\nabla \times \vec{E} = 0$ (cirkulacija polja)

I. $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ (Gaussov izrek v diferencialni obliki)
Maxwellova enačba za elektrostatsko polje)

Definicija silnic:

$$\dot{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{F}(\vec{r}(s))}{|\vec{F}(\vec{r}(s))|} \qquad \vec{F} = e\vec{E}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(s) = \frac{\vec{E}(\vec{r}(s))}{|\vec{E}(\vec{r}(s))|} \quad ; \quad \dot{\vec{r}}(s) = \frac{\vec{r}(s)}{|\vec{r}(s)|}$$

- silnice kažejo v smeri električnega polja in se v nobeni točki ne morejo sekati
- površinska gostota silnic je sorazmerna velikosti $|\vec{E}|$
- izvirajo v + nabojih, izginjajo v −
- silnice niso nikoli zaključene; definirane le zunaj delov prostora, ki vsebujejo porazdeljen naboj
- vsaka silnica je kot napeta struna - nasprotna se ~~p~~ privlačita
- bližnje silnice se odbijajo

Poissonova enačba:

$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \underbrace{\varphi(\vec{r})}$ skalarno polje

$$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot (-\nabla \varphi(\vec{r})) = -\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi(\vec{r})$$

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

└ Laplaceov operator

Laplaceova enačba: $\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = 0$
(ni nabojev)

Ekvipotencialne ploskve so ⊥ na silnice

$$\varphi(A) - \varphi(B) = -\int_B^A \vec{E}\, d\vec{r} \Rightarrow \text{če } \forall d\vec{r} \perp \vec{E} \rightarrow \varphi(A) = \varphi(B)$$

Točkast naboj: $\rho(\vec{r}) = e\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)$

Točkast dipol: $\rho(\vec{r}) = (\vec{p}\cdot\nabla)\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)$

$\vec{p} = e(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^{*}$; $|\vec{p}| = ed$

$$\rho(\vec{r}) = \nabla\cdot\left(\vec{p}\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)\right) = \nabla\cdot\vec{P}(\vec{r})$$

$\downarrow$ vektor polarizacije

$*$: $\vec{r}_{1/2} = \vec{r}_0 \pm \delta\vec{r}$

$$\rho(\vec{r}) = e\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_1) - e\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_2)$$

Površinsko porazdeljen naboj:

$$\rho(\vec{r}) = \sigma(\vec{\rho})\,\delta(z-z_0) \qquad \vec{\rho} = (x,y)$$

└ 2D radij vektor

$$\int_V \rho(\vec{r})\,d^3\vec{r} = \int_V \sigma(\vec{\rho})\,\delta(z-z_0)\,dz\,d^3\vec{\rho} = \int_S \sigma(\vec{\rho})\,d^2\vec{\rho}$$

Površinsko porazdeljen dipol:

$$\rho(\vec{r}) = \sigma(\vec{\rho})\delta(z-z_1) - \sigma(\vec{\rho})\delta(z-z_2)$$

(Imamo dve plasti: $\sigma(\vec{\rho})$ in $-\sigma(\vec{\rho})$ na ravninah

$z = z_0 \pm \delta z$; $\delta z \ll z_0$ (WTF)

Taylor po δz...

$$\rho(\vec{r}) = p(\vec{\rho})\frac{\partial}{\partial z}\delta(z-z_0)$$

└ površinska gostota dipolnega momenta

$$p(\vec{\rho}) = \sigma(\vec{\rho})\,(z_2-z_1)$$

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial z}\left(p(\vec{\rho})\,\delta(z-z_0)\right)$$

Volumsko porazdeljen naboj:

primer nabite krogle z radijem a:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 \,; & |\vec{r}|<a \\ 0 \,; & |\vec{r}|>a \end{cases} = \rho_0 H(r-a)$$

Volumsko porazdeljen dipol:

$$\rho(\vec{r}) = \nabla\cdot\vec{P}(\vec{r}) \qquad \vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{P}_0 \,; & |\vec{r}|<a \\ 0 \,; & |\vec{r}|>a \end{cases} = \vec{P}_0 H(r-a)$$

$\downarrow$

vektor polarizacije

$$\frac{d}{dr} H(r-a) = \delta(r-a)$$

$$\rho(\vec{r}) = (\vec{P}_0 \cdot \vec{n})\,\delta(r-a) \qquad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$ (normalni vektor na površino krogle)

Električno polje površinske porazdelitve naboja:

$$\int_{(V)} (\nabla \cdot \vec{E})\, d^3\vec{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{(S)} \sigma(\vec{\rho})\,\delta(z-z_0)\, d^3\vec{r}$$

Naboj imamo na površini $z = z_0$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\sigma(\vec{\rho})}{\varepsilon_0}\,\delta(z-z_0) \\ \vec{E} = (0, 0, E_z(z,\vec{\rho})) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial E_z(z,\vec{\rho})}{\partial z} = \frac{\sigma(\vec{\rho})}{\varepsilon_0}\,\delta(z-z_0)$$

$$E_z(z,\vec{\rho}) = \frac{\sigma(\vec{\rho})}{\varepsilon_0} H(z-z_0) + f(\vec{\rho})$$

Simetrija glede na os z, zato

$$f(\vec{\rho}) = -\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_z(z,\vec{\rho}) = \begin{cases} +\frac{1}{2}\dfrac{\sigma(\vec{\rho})}{\varepsilon_0}; & z > z_0 \\ -\frac{1}{2}\dfrac{\sigma(\vec{\rho})}{\varepsilon_0}; & z < z_0 \end{cases}$$

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Predpostavimo, da je rešitev Poissonove enačbe podana s konvolucijo:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}')\,d^3\vec{r}'$$

seveda deluje le na $\vec{r}$!

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = \int_V \nabla^2 G(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}')\,d^3\vec{r}'$$

$$\nabla^2 G(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')}{\varepsilon_0}$$ le tako lahko dobimo nazaj Poissonovo enačbo

Greenova funkcija Poissonove enačbe; splošno rešitev lahko sestavimo za poljubno porazdelitev gostote naboja, če le poznamo rešitev za točkast naboj.

Reprezentacija G. funkcije v obliki Fourierovega integrala:

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp[-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')]\, G(\vec{k}) \qquad (*)$$

V neskončnem, homogenem in izotropnem prostoru je $G(\vec{r}-\vec{r}')$ zgolj funkcija $|\vec{r}-\vec{r}'|$! Tudi F. slika mora biti zgolj funkcija absolutne vrednosti val. vektorja: $G(\vec{k}) = G(k)$

Podobno tudi za Dirac:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')) \qquad (**)$$

(*) & (**) dobimo:

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')) \overbrace{\left[-k^2 G(k) - \frac{1}{\varepsilon_0}\right]}^{***} = 0$$

$$\nabla G(\vec{r}-\vec{r}') = -i\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'))\,\vec{k}\, G(\vec{k})$$

deluje seveda le na koordinatni del $\qquad \nabla \to i\vec{k}$ (transformiranka)

***:

$$G(\vec{k}) = -\frac{1}{\varepsilon_0 k^2}$$

Greenova funkcija v direktnem prostoru:

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{\exp(-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,'))}{k^2}$$

$$\int d^3\vec{k} = 2\pi\int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta)\int_0^\infty k^2\,dk$$

Dobimo:

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{2\pi}{(2\pi)^3\varepsilon_0}\int_{-1}^{+1}\int_0^\infty \frac{\exp(-ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|\cos\vartheta)}{k^2}k^2\,dk\,d(\cos\vartheta) =$$

$$= -\frac{4\pi}{(2\pi)^3\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{\sin[k|\vec{r}-\vec{r}\,'|]}{k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dk = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx}_{\frac{\pi}{2}}$$

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = G(|\vec{r}-\vec{r}\,'|) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Greenova funkcije Poissonove enačbe v neskončnem, nehomogenem prostoru. Enako je potencialu točkastega naboja.

$\vec{F} = e\vec{E} \qquad dA = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -e\vec{E}\cdot d\vec{r} = e\nabla\varphi\cdot d\vec{r}$

Na poti od 1 do 2 je opravljeno delo = = razlika energij, če ni disipacije toplote

$A = W(2) - W(1) = e\int_1^2 \nabla\varphi\cdot d\vec{r} = e(\varphi(2) - \varphi(1))$

$W = e\varphi$

$W = \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\,d^3\vec{r} \qquad w(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})$

$\downarrow$

Gostota energije w porazdelitve naboja v zunanjem polju, ki ga ustvarjajo drugi naboji.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{(V)} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'$$

$$dW = \int d\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d^3\vec{r} = \int d\alpha\rho(\vec{r})\alpha\varphi(\vec{r})d^3\vec{r} = \alpha d\alpha \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d^3\vec{r}$$

$$W = \int_0^1 \alpha\, d\alpha \int \rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\,d^3\vec{r}$$

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d^3\vec{r}$$

ta potencial ustvarja $\rho(\vec{r})\underset{0}{V}$

To energijo rabimo, da nabijemo področje od 0 do neke gostote naboja $\rho(\vec{r})$. To je <u>elektrostatska energija polja.</u>

α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ S tem „gumbom" naboje nabijemo do poljubne vrednosti med 0 in $\rho(\vec{r})$.

α – parameter nabijanja

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\,d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int (\nabla\cdot\vec{E})\,\varphi\, d^3\vec{r} =$$

I. Maxwellova

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_V [\nabla(\varphi\vec{E}) - (\nabla\varphi)\vec{E}]\,d^3\vec{r}$$

$$\oint\limits_{\partial V} \varphi(\vec{E}\vec{n})\,dS \rightarrow 0$$ (če je V dovolj velik, potencial in polje padeta)

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\oint\limits_{\partial V} \varphi(\vec{E}\vec{n})\,dS - \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_V (\nabla\varphi)\vec{E}\,d^3\vec{r} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2(\vec{r})\,d^3\vec{r}$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$\vec{F} = \int_V \rho(\vec{r})\, \vec{E}(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$ ← sila na zvezno porazdelitev naboja

$\vec{E}(\vec{r})$ → polje vseh izvorov

sila zgolj na tisti $\vec{E}$, ki ga ustvarja ρ, je 0 :)

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \int_{(V)} (\nabla \cdot \vec{E})\, \vec{E}\, d^3\vec{r}$$

Vektorska identiteta:

$$\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) = \nabla(\vec{E} \otimes \vec{E}) - (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}$$

Gauss-Ostrogradski:

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \oint_V \vec{E}\,(\vec{E}\, d\vec{S}) - \varepsilon_0 \int_V (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}\, d^3\vec{r}$$

$$\frac{1}{2}\nabla(E^2) = (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} + \vec{E} \times \underbrace{(\nabla \times \vec{E})}_{0} = (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}$$

$$\int_{(V)} d^3\vec{r}\, \nabla E^2 = \oint_{(\partial V)} d\vec{S}\, E^2 = \oint_{(\partial V)} \vec{n}\, E^2\, dS$$

Končna sila:

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \oint_{(\partial V)} \left[\vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2}\vec{n}\, E^2\right] dS$$

Površina po kateri integriramo zaobjema porazdelitev nabojev (onih na katere silo računamo).

Nek integral prostorske porazdelitve polja po površini, ki zamejuje področje, na katerega želimo silo računati.

$$F_i = \oint_{(\partial V)} T_{ik}\, n_k\, dS$$

$$T_{ik} = \varepsilon_0 \left(E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik}\right) \quad \text{(tenzor)}$$

– enaka naboja:

$E_z = 0$ & $E_\rho \neq 0$

razdalja $2a$

zveznica OT z, $\rho \perp z$

$$E_\rho = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{\rho}}{r} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{\rho}}{r} = \frac{2e\vec{\rho}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + a^2}$$

$$F_z = \varepsilon_0 \oint E_z(\vec{E}\cdot\vec{n})\,dS - \frac{\varepsilon_0}{2}\oint E^2\,dS = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int E_\rho^2\,dS$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \frac{4e^2\rho^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^6}\,2\pi\rho\,d\rho = -\frac{\varepsilon_0 4e^2 2\pi}{2(4\pi\varepsilon_0)^2}\int_0^\infty \frac{\rho^2\rho\,d\rho}{(\rho^2+a^2)^3} =$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}$$

– nasprotna naboja:

$E_z \neq 0$ in $E_\rho = 0$

$$E_z = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{(-a)}{r} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{a}{r} = -\frac{2ea}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$F_z = \varepsilon_0 \oint E_z(\vec{E}\cdot\vec{n})\,dS - \frac{\varepsilon_0}{2}\oint E^2\,dS = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_z^2\,dS =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int \frac{4e^2a^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^6}\,2\pi\rho\,d\rho = \frac{\varepsilon_0 4e^2 2\pi a^2}{2(4\pi\varepsilon_0)^2}\int_0^\infty \frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+a^2)^3} =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{(V)} \frac{\rho(\vec{s})\, d^3\vec{s}}{|\vec{r}-\vec{s}|}$$

Taylor:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|} = \frac{1}{|\vec{r}|} - (\vec{s}\cdot\nabla)\frac{1}{|\vec{r}|} + \ldots = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{(\vec{s}\cdot\vec{r})}{|\vec{r}|^3} + \ldots$$

$$|\vec{r}| = r$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|} \int \rho(\vec{s})\, d^3\vec{s} + \frac{\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \int \vec{s}\rho(\vec{s})\, d^3\vec{s} + \ldots$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \ldots$$

$$e = \int \rho(\vec{s})\, d^3\vec{s}$$

$$\vec{p} = \int \vec{s}\rho(\vec{s})\, d^3\vec{s}$$

Lahko tudi zapišemo:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \ldots$$

Potencial in polje točkastega dipola:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\frac{1}{r}$$

oz.: $$\varphi(\vec{r}) = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Električna poljska jakost:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi = -\nabla\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

$$W = \int_{(V)} d^3\vec{r}\, \rho_0(\vec{r})\, \phi(\vec{r})$$ (Energija testne porazdelitve naboja ρ_0)

Recimo, da je skoncentrirana v predelu V_0:

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) + \vec{r}\cdot\nabla\phi(\vec{r}_0) + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$W = \int_{(V)} d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r})\left(\phi(\vec{r}_0) + \vec{r}\cdot\nabla\phi(\vec{r}_0) + \dots\right)$$

$$W = \phi(\vec{r}_0)\underbrace{\int_{(V)} d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r})}_{e_0} + \nabla\phi(\vec{r}_0)\underbrace{\int_{(V)} d^3\vec{r}\, \vec{r}\rho(\vec{r})}_{p_0} + \dots$$

$$W = e_0\phi(\vec{r}_0) - (\vec{p}_0\cdot\vec{E}(\vec{r}_0))$$

Interakcijska energija med dvema porazdelitvama nabojev:

$$W = \frac{e e_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{e_0(\vec{p}\,\vec{r}) + e(\vec{p}_0\cdot\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + $$
$$+ \frac{(\vec{p}\cdot\vec{p}_0)r^2 - 3(\vec{p}_0\cdot\vec{r})(\vec{p}\cdot\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^5} + \dots$$

monopol – monopol, monopol – dipol, dipol – dipol, ...

$$dW = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$dW = e_0\nabla\varphi(\vec{r}_0)\cdot d\vec{r} - \nabla(\vec{p}_0\cdot\vec{E}(\vec{r}_0))\cdot d\vec{r} = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\nabla(\vec{p}_0\cdot\vec{E}(\vec{r}_0)) = \vec{p}_0\times(\nabla\times\vec{E}(\vec{r}_0)) + (\vec{p}_0\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r}_0)$$

$$\vec{F} = e_0\vec{E}(\vec{r}_0) + (\vec{p}_0\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r}_0)$$

Navor na testno porazdelitev naboja ρ_0:

$$dW = -\vec{M}\cdot d\vec{\Phi}$$

$$d\vec{p}_0 = d\vec{\Phi}\times\vec{p}_0$$

$$dW = -d\vec{p}_0\cdot\vec{E}(\vec{r}_0) = -(d\vec{\Phi}\times\vec{p}_0)\cdot\vec{E}(\vec{r}_0) = -d\vec{\Phi}\cdot(\vec{p}_0\times\vec{E}(\vec{r}_0))$$

$$\vec{M} = \vec{p}_0\times\vec{E}(\vec{r}_0)$$

$$M = -\frac{\partial W}{\partial \phi}$$

V zunanjem električnem polju se bo dipol zavrtel tako, da bo skušal biti vzporeden z zunanjim poljem.

$$I = \int_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} (\vec{j}\,\vec{n})\, dS \qquad (*)$$

$$dI = d\,\frac{de}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{\rho(\vec{r})\,dV}{dt} = \frac{\rho(\vec{r})\, dS\, v_n\, dt}{dt} = \qquad (**)$$

$$= \rho(\vec{r})\, dS\, v_n$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\,\vec{v}(t)$$

Z $^{(*)}$ vpeljavo gostote toka damo toku (I) vektorski značaj. Električni tok je tako po definiciji ravno pretok gostote električnega toka.

Po dogovoru so pozitivni nosilci naboja povezani s smerjo gibanja. Gostota toka ima lahko v prostoru poljubno porazdelitev.

(**)

$\rho(\vec{r})$ – naj ne bo eksplicitno odvisno od časa $\rightarrow$ vsi deli te porazdelitve se gibljejo z isto hitrostjo $\vec{v}$. Ta porazdelitev naboja se giblje po namišljeni površini v prostoru.

v_n – komponenta hitrosti gibanja porazdelitve naboja pravokotno na ploskovni element $d\vec{S}$.

- za linearen vodnik

Imamo zelo tanek vodnik, popisuje ga krivulja $\vec{r}(\ell)$

ℓ je naravni parameter te krivulje

$\vec{t}$ – kaže v smeri tangente na $\vec{r}(\ell)$ $\quad \vec{t}(\ell) = \dot{\vec{r}}(\ell)$

$\vec{\rho}(x,y)$ – definiran v normalni ravnini, ležita tam tudi normala in binormala

$$\vec{j}(\vec{r}) = I\,\vec{t}(\ell)\,\delta_\perp^2(\vec{\rho}(\ell))$$

2D Dirac def. v normalni ravnini v dani točki $\vec{r}(\ell)$

$$\int_{(V)} \vec{j}(\vec{r})\, d^3\vec{r} = \int_{(V)} I\,\vec{t}\,\delta_\perp^2(\vec{\rho}(\ell))\, d\ell\, d^2\vec{\rho} = \int_{(L)} I\,\vec{t}\, d\ell = \int_{(L)} I\, d\vec{\ell}$$

Magnetne silnice: $\dot{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{B}(\vec{r}(s))}{|\vec{B}(\vec{r}(s))|}$

- kažejo v smeri magnetnega polju in se v nobeni točhi ne morejo sekati
- površinska gostota silnic je sorazmerna velikosti $|\vec{B}|$
- so vedno zaključene in nimajo ne izvorov ne ponorov
- bližnje silnice se odbijajo;

tokovni vodnik, ki ustvarja magnetne silnice, je vedno pod mehansko napetostjo zaradi teh silnic —> skušajo ga podaljšati
zaključena tokovna zanka privzame obliko kroga!

Tokovnice: $\dot{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{j}(\vec{r}(s))}{|\vec{j}(\vec{r}(s))|}$

$\oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ G-O: $\nabla \cdot \vec{j} = 0$

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (silnice so zaključene)

$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$\vec{A}$ - splošno vektorsko polje

magnetni potencial (Vs)

$$\phi_M = \int_S \vec{B} \, d\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Stokesov teorem

magnetni pretok je enak cirkulaciji vektorskega potenciala po zanki, ki obkroža površino, skozi katero računamo pretok

Ampérov zakon predelamo:

$$\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Helmholtzov teorem - vektor razstavimo

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 ; \quad \nabla \cdot \vec{A}_1 = 0 \; \& \; \nabla \times \vec{A}_2 = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Splošno rešitev zapišemo z Greenovo funkcijo:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r} - \vec{r}\,') \vec{j}(\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,' \qquad G(\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\nabla^2 G(\vec{r} - \vec{r}\,') = -\mu_0 \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Kirchhoffova enačba

$\vec{B} = (0, 0, B_0)$

$\vec{A} = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}) \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$ (znotraj tuljave)

Zunaj tuljave:

$\vec{B} = 0 \qquad \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_0 \pi a^2$; a - radij tuljave

$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} \neq 0$ Vektorski potencial zunaj torej ni 0!

$\vec{A} = c \vec{B} \times \frac{\vec{r}}{r^2}$ nastavek

$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 2\pi c B_0$

$\vec{A} = \frac{a^2}{2} \vec{B} \times \frac{\vec{r}}{r^2}$

Pri $r=a$ je potencial očitno zvezen.

Ni aditiven do konstante - različen tudi v delih prostora, kjer magnetnega polja ni!

Nov magnetni potencial: $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla S(\vec{r})$

$\nabla \times \nabla S(\vec{r}) = 0$

Vektorskem potencialu vedno lahko prištejemo gradient neke skalarne funkcije, pri tem se ne bo spremenilo magnetno polje.

$S(\vec{r}) = -\frac{B_0 a^2}{2} \underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$ zvezna funkcija, problem le na negativni polosi x - tam skoči od $-\pi$ do π (za 2π)

$\vec{A}' = \frac{a^2}{2} \vec{B} \times \frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{B_0 a^2}{2} \nabla \arctan\left(\frac{y}{x}\right) =$

$= \frac{a^2}{2} \vec{B} \times \frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{B_0 a^2}{2} \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2} = 0$

Ne velja na poltraku $x<0$, drugod pa.

$$\vec{A}' = \frac{a^2}{2}\vec{B}\times\frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{B_0 a^2}{2}\nabla\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{B_0 a^2}{2}\frac{(-2\pi)}{a}\delta(\phi-\pi)$$

Magnetni pretok?

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = B_0 \pi a^2 = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\oint_C \vec{A}'\cdot d\vec{r} = \oint_C \left(\frac{a^2}{2}\vec{B}\times\frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{B_0 a^2}{2}\nabla\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cdot d\vec{r} =$$

$$= -\frac{B_0 a^2}{2}(-2\pi)\int\delta(\phi-\pi)\,d\phi =$$

$$= -\frac{B_0 a^2}{2}\times(-2\pi) = B_0\pi a^2$$

Ta singularnost na poltraku poskrbi, da se magnetni pretok ne spremeni. Ta poltrak se imenuje tudi Diracova struna.

gostota magnetnega polja

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\nabla \times \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \times \vec{j}(\vec{r}\,') = \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d^3\vec{r}\,'$$

Biot–Savartova enačba

Žica je ravna, njen smerni vektor $\vec{z}$ kaže v smeri z in to je tudi smer toka.

$$B_\phi(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\theta(z))}{a^2+z^2}\, dz$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{z} \qquad dz = -\frac{a}{(\sin(\alpha))^2}\, d\alpha$$

$$B_\phi(|\vec{r}|=a) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi d\alpha\, \sin(\alpha) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

statično, stacionarna aproksimacija

Tokovi so različni od 0 in s časom se ne spreminjajo.

Sila na magnetno zanko C:

$$\vec{F} = I \oint_C (\vec{t} \times \vec{B})\, dl$$

Zanko C prestavimo za $d\vec{r}$:

$$dA = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -I \oint_C d\vec{r}\,(\vec{t} \times \vec{B})\, dl = -I \oint_C (d\vec{r} \times \vec{t})\, dl \cdot \vec{B}$$

$d\vec{r} \times \vec{t}\, dl$ je diferencial površine, ki jo opiše zanka pri premiku $d\vec{s}$. Opravljeno delo po končnem premiku:

$$A = -I \int_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -I\,\phi_M$$

S – površina, ki jo opiše zanka pri premiku

$$A = -I \int_{(S)} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = -I \oint_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{A} + I \oint_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{A} \qquad \text{(stokes)}$$

$$I\, \vec{t}\, dl = \vec{j}\, d^3\vec{r}$$

$$A = W(2) - W(1) = -\int_2 \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})\, d^3\vec{r} + \int_1 \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

Torej energija je:

$$W = -\int_{(V)} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

narava interakcij med porazdelitvami tokov

Gostota po je: $w(\vec{r}) = -\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\vec{j}'(\vec{r}') \cdot d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$W = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \int_{(V)} \frac{\vec{j}(\vec{r})\, \vec{j}'(\vec{r}')\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

privlačni sila; nasprotno kot pri el. polja

V magnetnem polju so stvari bolj zapletene kot pa pri električnem. Upoštevati je treba tudi Faradayevo indukcijo. Ko spreminjamo α (*), se s časom spreminja tudi magnetno polje, ki povzroča spremembe električnega polja in tudi toka v zankah. Pri elektrostatiki smo imeli naboje, ne zanke.

$$*: \quad W = -\int_0^1 \alpha\, d\alpha \int_{(V)} \vec{j}(\vec{r})\, \vec{A}(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

Dodati moramo še en člen.

Zaradi Faradayeve indukcije se pojavi v zanki napetost, ki nasprotuje spremembi toka. Da bi ohranili dano vrednost toka moramo zato opraviti delo oziroma trošiti moč.

$$P = -IU = -I\int_C \vec{E}\,d\vec{r} = I\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

C – zanka po kateri teče tok I, S – površina

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$W = -I\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = I\int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \oint_C I\vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_V \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\cdot d^3\vec{r}$$

Seštejemo oba prispevka in dobimo

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\,d^3\vec{r}$$

Tako se je predznak obrnil.

Gostota magnetnega polja: $W = \frac{1}{2}\int \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\,d^3\vec{r} =$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int_V \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})\,d^3\vec{r} = \frac{1}{2\mu_0}\int_V \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,d^3\vec{r} +$$

$$-\frac{1}{2\mu_0}\int_V \nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{A})\,d^3\vec{r}$$

G – O → 2. člen je 0

Magnetostatska energija je popolnoma določena, če poznamo bodisi prostorninsko konf. magnetnega polja ali tokov. Gostota celotne magnetne energije:

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu_0}B^2(\vec{r})$$

Še vodnik: (sklenjen)

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\,d^3\vec{r} = \frac{1}{2}I\int_C \vec{A}(\vec{r}(l))\cdot d\vec{l} = \frac{1}{2}I\int_S \nabla\times\vec{A}(\vec{r}(l))\cdot d\vec{S}$$

$$W = \frac{1}{2}I\int_S \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}I\,\phi_M$$

$$\vec{F} = \int_{(V)} \left(\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\right) d^3\vec{r} \quad * \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \int_{(V)} \left((\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}\right) d^3\vec{r}$$

$$\vec{B} \times \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{2} \nabla B^2 - \nabla(\vec{B} \otimes \vec{B}) + \vec{B}(\overset{=0\ :)}{\nabla \cdot \vec{B}})$$

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \int_{(V)} \left[\nabla(\vec{B} \otimes \vec{B}) - \frac{1}{2} \nabla B^2\right] d^3\vec{r}$$

G–O:

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{(\partial V)} \left[\vec{B}(\vec{B}\vec{n}) - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}\right] dS$$

Sila je integral površinske porazdelitve polja po površini, ki zamejuje gostoto toka, na katerega silo računamo.

* Sila na poljubno prostorsko porazdelitev gostote toka. Magnetno polje ni le zunanje m. p., pač pa celotno magnetno polje, ki vsebuje tudi tisti del, ki ga ustvarja gostota toka $\vec{j}$. (III. Newtonov zakon)

Tenzor napetosti magnetnega polja:

$$F_i = \oint_{(\partial V)} T_{ik} n_k \, dS$$

Magnetni del tenzorja:

$$T_{ik} = \frac{1}{\mu_0} \left[B_i B_k - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ik}\right]$$

Tokova v različnih smereh

razdalja $2a$, tok I, po osi y, veznica z

$$B_z = B_y = 0; \quad B_x \neq 0$$

$$F_z = \frac{1}{\mu_0}\int \left[B_z(\vec{B}\vec{n}) - \frac{1}{2}B^2 n_z \right] dS = -\frac{1}{2\mu_0}\int B_x^2 n_z \, dS$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{2\cos\theta}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2+a^2)}$$

θ - kot med veznico med žicama in smerjo, kjer merimo polje

$$\frac{F_z}{L} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{2(\mu_0 I)^2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi(2a)}$$

Sila je odbojna.

Tokova v istih smereh

$$B_z \neq 0; \quad B_x = B_y = 0$$

$$F_z = \frac{1}{\mu_0}\int \left[B_z(\vec{B}\cdot\vec{n}) - \frac{1}{2}B^2 n_z \right] dS = \frac{1}{2\mu_0}\int B_z^2 \, dS$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I \, 2\sin(\theta)}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\mu_0 I x}{\pi(x^2+a^2)}$$

$$\frac{F_z}{L} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{2(\mu_0 I)^2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{x^2 dz}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(2a)}$$

Privlačna sila.

Magnetno polje okrog vodnika:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|}\, d^3\vec{s}$$ Splošna oblika vektorskega potenciala v odvisnosti od gostote toka

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|} = \frac{1}{r} - (\vec{s}\cdot\nabla)\frac{1}{r} + \ldots = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{s}\cdot\vec{r})}{r^3} + \ldots$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\underbrace{\int \vec{j}(\vec{s})\, d^3\vec{s}}_{I_1} + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\underbrace{\int (\vec{r}\,\vec{s})\,\vec{j}(\vec{s})\, d^3\vec{s}}_{I_2}$$

Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ do 2. reda

Polje, dovolj daleč od izvorov, velja razvoj

Uporabim: $\int_V \vec{s}\,(\nabla\cdot\vec{j})\, d^3\vec{s} = 0$

$$\int_V \nabla(\vec{j}\otimes\vec{s})\, d^3\vec{s} - \int (\vec{j}\cdot\nabla)\vec{s}\, d^3\vec{s} = 0$$

površinski integral, ki zaobjema gostoto toka

$$\underbrace{\int_{(\partial V)} \vec{j}\otimes\vec{s}\, d^3\vec{s}}_{0}$$

$$-\int \vec{j}(\vec{s})\, d^3\vec{s} = 0$$

$\Downarrow$

$I_1 = 0$ (mag. monopola NI)

$$I_2 = \int (\vec{s}\cdot\vec{r})\,\vec{j}(\vec{s})\, d^3\vec{s} = \int (\vec{j}\otimes\vec{s})\,\vec{r}\, d^3\vec{s} = \int \vec{r}\,(\vec{s}\otimes\vec{j})\, d^3\vec{s} =$$

$$= \vec{r}\int\Big[\underbrace{\tfrac{1}{2}(\vec{s}\otimes\vec{j} + \vec{j}\otimes\vec{s})}_{I_3} + \tfrac{1}{2}(\vec{s}\otimes\vec{j} - \vec{j}\otimes\vec{s})\Big]\, d^3\vec{s}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int (\vec{s}\otimes\vec{j} + \vec{j}\otimes\vec{s})\, d^3\vec{s} = \frac{1}{2}\int \big(\vec{s}\otimes(\vec{j}\nabla)\vec{s} +$$

$$+ (\vec{j}\nabla)\vec{s}\otimes\vec{s}\big)\, d^3\vec{s} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \nabla(\vec{j}\,\vec{s}\otimes\vec{s})\, d^3\vec{s} + \frac{1}{2}\int \underbrace{(\nabla\cdot\vec{j})}_{0}\,\vec{s}\otimes\vec{s}\, d^3\vec{s}$$

Ostane:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\frac{1}{2}\int \vec{r}\,(\vec{s}\otimes\vec{j} - \vec{j}\otimes\vec{s})\, d^3\vec{s} =$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi r^3}\int \underbrace{\big(\vec{j}\,(\vec{s}\cdot\vec{r}) - \vec{s}(\vec{j}\cdot\vec{r})\big)}_{\vec{r}\times(\vec{j}\times\vec{s})}\, d^3\vec{s}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r} \times \vec{m}}{r^3}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{s} \times \vec{j}) \, d^3\vec{s}$$

magnetni dipolni moment

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{s})\left(\vec{s}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right) d^3\vec{s}$$

$$\vec{j}(\vec{s})\left(\vec{s}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{j}(\vec{s})\left(\vec{s}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right) - \vec{s}\left(\vec{j}(\vec{s})\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\vec{j}(\vec{s})\left(\vec{s}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right) + \vec{s}\left(\vec{j}(\vec{s})\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\right)$$

Omejim se na zaključen vodnik, ki ga popisuje prostorska zanka C.

$$\vec{j}\, d^3\vec{r} \rightarrow I\, d\vec{l}$$

$$\left(d\vec{l}\left(\vec{s}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right) + \vec{s}\left(d\vec{l}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\right) = d\left(\vec{s}\left(\vec{l}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\right)$$

Popoln diferencial, integral po krivulji zaključeni da 0.

$$\vec{j}(\vec{s})\left(\vec{s}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right) - \vec{s}\left(\vec{j}(\vec{s})\cdot\nabla\frac{1}{r}\right) = \left(\vec{s}\times\vec{j}(\vec{s})\right)\times\nabla\frac{1}{r}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{8\pi r^3}\,\vec{r}\times\int_V \left(\vec{s}\times\vec{j}(\vec{s})\right) d^3\vec{s}$$

Magnetni dipolni moment:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{s}\times\vec{j}(\vec{s})\, d^3\vec{s}$$

Najnižji člen multipolnega razvoja magnetnega potenciala. Začne se pri dipolnem členu, NE monopolnim.

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{r}\times\vec{m}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{\vec{m}}{r}$$

$$|\vec{A}(\vec{r})| = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m\sin(\theta)}{r^2}$$

θ - kot med smerjo dipolnega momenta in radijem vektorjem

Ekvipotencialne ploskve magnetnega dipola so ortogonalne na ekvipotencialne ploskve električnega dipola.

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\nabla\times\frac{\vec{m}}{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3\vec{r}(\vec{m}\vec{r}) - \vec{m}r^2}{r^5}$$

$$B\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\mu_0 2m\cos(\theta)}{4\pi r^3}$$

$$\vec{B}\frac{\vec{m}}{m} = \frac{\mu_0 m\left(3\cos^2\theta - 1\right)}{4\pi r^3}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V \vec{s} \times \vec{j}(\vec{s})\, d^3\vec{s} = \frac{I}{2}\vec{n}\, a \int_c dl = I \pi a^2 \vec{n} = I S \vec{n}$$

Magnetni dipolni moment krožne zanke z radijem a po kateri teče tok I. Je sorazmerna (velikost) površini zanke.

Tokovna zanka v zunanjem polju = magnetni dipol v zunanjem polju

$$W = -\int_{(V_0)} d^3\vec{r}\, \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

$\vec{A}(\vec{r})$ → zunanji magnetni potencial

(V_0) ← zaobjema prostor, kjer je definiran $\vec{j}(\vec{s})$

razvijemo okrog $\vec{r}_0$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}_0) + (\vec{r}\cdot\nabla_0)\vec{A}(\vec{r}_0) + \dots$$

$$W = -\int_{(V)} d^3\vec{r}\, \vec{j}(\vec{r})\cdot\left(\vec{A}(\vec{r}_0) + \vec{r}\cdot\nabla_0 \vec{A}(\vec{r}_0) + \dots\right)$$

oz.

$$W = -\vec{A}(\vec{r}_0)\int_{(V_0)} d^3\vec{r}\, \vec{j}(\vec{r}) - \int_{(V_0)} d^3\vec{r}\, \vec{j}(\vec{r})(\vec{r}\cdot\nabla_0)\vec{A}(\vec{r}_0)$$

monopolni člen, je enak 0

2. člen: $\int_{(V_0)} d^3\vec{r}\, \vec{j}(\vec{r})(\vec{r}\cdot\nabla_0)\vec{A}(\vec{r}_0) = I\oint_C d\vec{l}\,(\vec{r}\cdot\nabla_0)\vec{A}(\vec{r}_0)$

Uporaba identitete: $(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\vec{C})(\vec{B}\vec{D}) - (\vec{A}\vec{D})(\vec{B}\vec{C})$

$$(\vec{r}\cdot\nabla_0)(d\vec{l}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0)) - (\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0))(d\vec{l}\cdot\nabla_0) = (\vec{r}\times d\vec{l})(\nabla_0\times\vec{A}(\vec{r}_0))$$

in seveda

$$d[(\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0))(\vec{l}\cdot\nabla_0)] = (d\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0))(\vec{l}\cdot\nabla_0) + \cancel{(\vec{r}\times d\vec{l})(\nabla_0\times\vec{A}(\vec{r}_0))}\ (\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0))(d\vec{l}\cdot\nabla_0)$$

$$(\vec{r}\cdot\nabla_0)(d\vec{l}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0)) = -(\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0))(d\vec{l}\cdot\nabla_0)$$

enako 0 (leva stran) pri integralu po zanki C ni razlike med $d\vec{r}$ in $d\vec{l}$

Dobimo:

$$I\oint_C d\vec{l}\,(\vec{r}\cdot\nabla_0)\vec{A}(\vec{r}_0) = (\nabla_0\times\vec{A}(\vec{r}_0))\frac{1}{2}I\oint_C(\vec{r}\times d\vec{l})$$

$$W = -\nabla\times\vec{A}(\vec{r}_0)\cdot\left(\frac{1}{2}\int_{(V_0)} d^3\vec{r}\ \vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})\right)$$

$$W = -(\vec{m}\,\vec{B}(\vec{r}_0))$$

Energija interakcije $\vec{m}_1$ in $\vec{m}_2$:

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^5}\left[(\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2)r^2 - 3(\vec{m}_1\cdot\vec{r})(\vec{m}_2\cdot\vec{r})\right]$$

Sila in navor:

Sprememba magnetne energije: $dW = -\vec{F}\cdot \underbrace{d\vec{r}}$

majhen premik testne porazdelitve gostote toka v zunanjem magnetnem polju

$$dW = -\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{r}))\cdot d\vec{r}$$

$$\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{r})) = \vec{m}\times(\nabla\times\vec{B}(\vec{r})) + (\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{F} = (\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}(\vec{r})$$

na tem mestu ni porazdelitve $\vec{j}$! Daleč stran od $\vec{j}_0$

Navor: $dW = -\vec{M}\cdot d\vec{\phi}$

$$d\vec{m} = d\vec{\phi}\times\vec{m}$$

$$dW = -d\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = -(d\vec{\phi}\times\vec{m})\cdot\vec{B}(\vec{r})$$

$$\underline{\underline{\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}}}$$

— m. dipol skuša se zavrteti tako, da bo vzporeden z zunanjim magnetnim poljem

Maxwellove enačbe:

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=0 \qquad \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$$

$\nabla\cdot\vec{j}=0$ (sklenjenost tokovnic v stacionarnem primeru)

Te enačbe ne opisujejo časovno spremenljivih polj: Gostota naboja in toka s časom se ne spreminjata.

$$\nabla\cdot\vec{E}=0 \qquad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$$

$$\nabla\cdot\vec{j}=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})=\mu_0\,\nabla\cdot\vec{j}=0$$

Silnice so sklenjene.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

zato zopet vpeljemo vektorski potencial

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Prej smo imeli le $\vec{E} = -\nabla \phi$

$$\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left(\nabla \times \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Prevodniki: elektroni ali elektronske vrzeli v kristalih; disociirani ioni soli v elektrolitih

Ohmov zakon sorazmernosti med gostoto toka in električnim poljem v snovi:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

σ ↓ ohmska prevodnost snovi

Če prevodnik postavimo v električno polje, se začnejo prosti naboji pod vplivom zunanjega polja gibati. Gibljejo se toliko časa, da se vzpostavi ravnovesno stanje. V ravnovesnem ne tečejo nobeni tokovi, sledi $\vec{j} = 0$ & $\vec{E} = 0$.

$\vec{E} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$ (Po Gaussovem zakonu)

Kje je naboj? Na površini, s površinsko gostoto naboja σ.

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \sigma$$

Če poznamo E na površini, lahko izračunamo inducirano površinsko gostoto naboja v termodinamičnem ravnovesju.

$\vec{E} \times \vec{n} = 0$ (sicer bi tok tekel po površini)

Mikroskopska slika $\rightarrow$ Ohmov zakon

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -m\gamma\vec{v}(t) + e\vec{E}(t)$$

delecime zunanje polje $\vec{E}$

Prvi člen na desni: upor – hidrodinamski (elektroliti),
– sipalni (kristalni polprevodniki)

$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \exp(-\gamma t) \quad \leftarrow \vec{E} = 0$

Energija se izgublja zaradi disipacije. Karakterističen čas: $(2\gamma)^{-1}$

$$\vec{v}(t) = \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} \exp(-\gamma(t-t'))\vec{E}(t')dt'$$

Več nosilcev naboja, volumska gostota oz. gostota naboja $\rho = ne$, celotna gostota toka je enaka

$\vec{j} = \rho\vec{v}$ oz.

$$\vec{j}(t) = ne\vec{v}(t) = \frac{ne^2}{m}\int_{-\infty}^{t} \exp(-\gamma(t-t'))\vec{E}(t')dt'$$

Ohmov zakon ($\vec{E} = \text{const.}$)

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{m\gamma}\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

mikroskopski izraz za statično prevodnost

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\gamma} \qquad \text{(Peter Debye)}$$

Tok omejen na vodnik dolžine $d\vec{\ell}$ in z lokalnim presekom S. Integrirajmo Ohmov zakon po dolžini:

$$\int_{(L)} \vec{j}\cdot d\vec{\ell} = \sigma \int_{(L)} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\sigma\left(\phi(2)-\phi(1)\right)$$

$$\int \vec{j}\cdot d\vec{\ell} = \int \frac{(\vec{j}\cdot\vec{E})\, d^3\vec{r}}{S} = I\int \frac{d\vec{\ell}}{S(\ell)}$$

$\vec{E}$ – tangenta vodnika

tu upoštevamo $\int \vec{j}\, d^3\vec{r} = \int I\, d\vec{\ell}$

Upornost vodnika:

$$R = \int \frac{d\ell}{\sigma S(\ell)}$$

Dobimo znameniti Ohmov zakon:

$$U = -\left(\phi(2)-\phi(1)\right) = RI$$

Še drugače zapisano:

$$R = \frac{\int_{L} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}{\int_{S} (\vec{j}\,\vec{n})\, dS}$$

$\Rightarrow$ npr. če dimenzije vodnika povečamo za 2x, se upor zmanjša za polovico

Disipacija energije

$$\vec F = \int_V \rho \vec E \, d^3\vec r$$

Magnetna sila je pravokotna na smer gibanja nabojev $\Rightarrow$ ne troši moči.
Pomemben je zgolj električni del sile.

Potrebujemo moč $\vec F\cdot\vec v$, da se delec giblje s hitrostjo $\vec v$.
Joulova moč:

$$P = \int_V \frac{\vec j}{\rho}\cdot\vec F \, d^3\vec r = \int_V \frac{1}{\rho}\left(\rho\vec j\vec E + \vec j\times\vec B\right) d^3\vec r$$

$\vec j = \rho\vec v$ (za en delec $\vec v_0$)

$$P = \int_V \vec j\cdot\vec E \, d^3\vec r$$

$\uparrow$ predstavlja izgube pri gibanju delcev v zunanjem polju – energija se disipira (zaradi vlažnosti v elektronih, sipanje in trkanje na kristalnih ionih)

Malo drugače: $P = -\int_V \vec j\left(\nabla\phi + \frac{\partial\vec A}{\partial t}\right) d^3\vec r$

$$\nabla\cdot(\phi\vec j) = \phi\underbrace{\nabla\cdot\vec j}_{\text{je } 0 \text{ (tokovnice sklenjene)}} + \vec j\cdot\nabla\phi = \vec j\cdot\nabla\phi$$

$$P = -\int_V \vec j\cdot\frac{\partial\vec A}{\partial t} d^3\vec r - \oint_{\partial V}\phi\,\vec j\cdot d\vec S$$

$\downarrow$ po površini prevodnika $\vec j\cdot\vec n = 0$, torej le na vstopu in izstopu

- tokokrog C, žica

$\vec j\, d^3\vec r \to I\, d\vec l$

$$\oint_{\partial V}\phi\,\vec j\cdot d\vec S = \oint_{\partial V}\phi(\vec j\vec n)\,dS = I\left(\phi(2) - \phi(1)\right)$$

$$\oint_{\partial V}\phi\,\vec j\cdot d\vec S = -IU \qquad P = -I\int_C \frac{\partial\vec A}{\partial t}\cdot d\vec l + IU$$

$$P=\int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\, d^3\vec{r} = \frac{1}{\sigma}\int_V \vec{j}\cdot\vec{j}\, d^3\vec{r} = \frac{I}{\sigma}\int \vec{j}\cdot d\vec{l} = I^2R$$

$$I^2R = -I\int_C \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot d\vec{l} + IU \quad \Bigg\}$$ Enačba za izgube v ohmskem vodniku.

Maxwellove enačbe

I. $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

IV. $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \underbrace{\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\text{premikalni tok}}$

II. $\nabla\cdot\vec{B} = 0$

III. $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$$

Ohranjenje naboja

$$\int_{(V_0)} \rho(\vec{r},t)\,d^3\vec{r} = e(t) \qquad \frac{de(t)}{dt} = -\oint_{(\partial V_0)} (\vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{n})\,dS$$

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0}\rho(\vec{r},t)\,d^3\vec{r} = \int_{V_0}\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}\,d^3\vec{r} = -\oint_{\partial V_0}\vec{j}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \qquad (6\text{-}0)$$

kontinuitetna enačba za naboj

Če v volumen V_0 ne teče noben tok, se naboj ohranja.

Tokovnice sedaj niso več zaključene.

$$\oint_{\partial V_0}\vec{j}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} = -\frac{de(t)}{dt} \neq 0$$

III. z $\vec{B}$ in IV. z $\vec{E}$

$$\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E} = -\vec{B}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}\cdot\vec{E} + \varepsilon_0\mu_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Enačbi odštejemo, dobimo:

$$\varepsilon_0\mu_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\nabla\times\vec{B} - \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E} - \mu_0\vec{j}\cdot\vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\right] + \nabla\cdot\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{P} + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0\ \right\}\text{kont. enačba}$$

Gostota energije EMP:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$ (Vsota gostota e. in m. polja)

Poyntingov vektor: (vektor gostote energijskega toka)

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$$

Kontinuitetna enačba – integracija & G-O:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(V)} w\,d^3\vec{r} = -\oint_{(\partial V)}(\vec{P}\cdot\vec{n})\,dS - \int_{(V)}(\vec{j}\cdot\vec{E})\,d^3\vec{r}$$

V danem volumnu se energija EM polja spreminja zato, ker skozi meje tega v vanj doteka en. tok, zgublja pa se kot Joulova toplota (2. člen n. t.)

<u>Poyntingov teorem</u>

Ohranitveni zakon za energijo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,d^3\vec{r} + \int_V \underbrace{(\vec{j}\cdot\vec{E})\,d^3\vec{r}}_{\text{mehanska moč } = \frac{d}{dt}W_m} = -\int_{\partial V}(\vec{P}\cdot\vec{n})\,d\vec{S}$$

$$\frac{d}{dt}\left(W_p + W_m \right) = -\int_{\partial V} (\vec{P}\vec{n})\, dS$$

$$W_p = \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) d^3\vec{r}$$

$W_p + W_m = \text{const.}$ (če volumen povečamo $\to \infty$)

$\uparrow$

vsaka zase se ne ohranjata

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B}) = \varepsilon_0\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} + \vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right] =$$

$$= \varepsilon_0\left[\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} - \frac{\mu_0}{\varepsilon_0\mu_0}(\vec{j}\times\vec{B}) - \vec{E}\times\nabla\times\vec{E}\right]$$

izrazil sem odvod po času

- $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j}\times\vec{B}$
- $\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{E}\times\nabla\times\vec{E}$

$$(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} = \nabla(\vec{B}\otimes\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{B})$$

$$(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} = -\frac{1}{2}\nabla B^2 - \vec{B}(\nabla\vec{B}) + \nabla(\vec{B}\otimes\vec{B}) =$$

$$= \frac{1}{2}\nabla E^2 - \nabla(\vec{E}\otimes\vec{E}) + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B}) = -\varepsilon_0\left[\frac{1}{2}\nabla E^2 - \nabla(\vec{E}\otimes\vec{E}) + \frac{c^2}{2}\nabla B^2 + \right.$$
$$\left. - c^2\nabla(\vec{B}\otimes\vec{B})\right] - (\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})$$

Izpostavim ∇, ε_0 gre v oklepaj:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B}) - \nabla\left[\varepsilon_0(\vec{E}\otimes\vec{E}) - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\otimes\vec{B}) - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\right] +$$
$$+ (\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}) = 0$$

divergenca tenzorja napetosti EM polja
(vsota tenzorjev E in M polja)

$$T_{ik} = \varepsilon_0 E_i E_k - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\delta_{ik} + \frac{1}{\mu_0}B_i B_k - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\delta_{ik}$$

$$\vec{g} = \varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$\vec{P} = c^2\vec{g} \qquad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

Gostota gibalne količine $\vec{g} = \varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})$ $\quad\vec{P} = c^2\vec{g}$

zadnji člen je Lorentzova sila.

Kont. enačba: $\frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0$ $\quad$ Cauchyeva enačba za EM polje

Integracija po volumnu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(V)} g_i\, d^3\vec{r} = \oint_{(\partial V)} T_{ik} n_k\, dS - \int_{(V)} f_i\, d^3\vec{r}$$

se v danem v spremini — skozi volumen dodeta — izgublja v volumnu ker poganja nabite delce

$$\frac{d}{dt}\int_{(V)} g_i\, d^3\vec{r} + \int_{(V)} f_i\, d^3\vec{r} = \oint_{(\partial V)} T_{ik} n_k\, dS$$

$$\int_{(V)} \vec{g}\, d^3\vec{r} = \vec{G}_p \qquad \int_{(V)} \vec{f}\, d^3\vec{r} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{G}_m$$

$$\frac{d}{dt}\left(G_{pi} + G_{mi}\right) = \oint T_{ik} n_k\, dS$$

$$\vec{G}^p + \vec{G}^m = \text{konst.}$$ Poincaré – Einsteina zakon

Ne ohranjata se obe komponenti sami zase.

Zaobjema ves volumen, vsa polja, vso snov

$$\rho_v(\vec{r},t) = \overline{\sum_i e_i \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i(t))}$$

Molekule so navzven nevtralne, a znotraj obstaja mikroskopska porazdelitev naboja ⇒ sicer nevtralna molekula ima lokalno porazdelitev naboja, imenujemo to vezani naboj. Če snov ni v zunanjem električnem polju, je za večino snovi v povprečju gostota vezanega naboja enaka nič.

Celotna gostota naboja = zunanji naboj (poljubno spreminjamo) + vezani naboj

$\vec{r}_i(t)$ – mikroskopske koordinate v. n.

I. M. E.: $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_v(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$

$\vec{E}$ – nekako prostorsko povprečeno polje

$\rho_v = -\nabla\cdot\vec{P}$ – Polarizacija

$\nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}) = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho$

$\vec{D}$ – gostota električnega polja – ni odvisen od vezanih nabojev v snovi. Njegovi izvori – zunanji naboji ⇒ zunanje polje. Zunanje polje $\vec{D}$ se v snovi razklopi na vsoto notranjega polja $\vec{E}$ in polarizacijo $\vec{P}$. Slednje je odziv snovi.

Za majhna $\vec{D}$:

$\vec{P}(\vec{D}) = \chi_E\vec{D} + \mathcal{O}(D^2) \qquad \chi_E$ – električna susceptibilnost, tenzor 2. reda

$\chi_E = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$; ε – dielektrična konstanta

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi_E\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + (1-\frac{1}{\varepsilon})\vec{D}$

$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$ in $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec{E}$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$-\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0}$$

Električni potencial

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

ta del je znan

velja princip superpozicije

$$\nabla' \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}) \, d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' +$$

je 0, 6-0 volumen dosti velik

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

$$\nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \leftarrow \text{točkasti dipol}$$

$\vec{P}$ je enak gostoti električnega dipolnega momenta v snovi. $\vec{P}(\vec{r}) = \vec{p}\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ damo v spodnjo enačbo in dobimo zgornjo.

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \int \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

V snovi obstajajo lokalni vezani tokovi. Če snov ni v zunanjem magnetnem polju, potem velja, da je povprečje (hidrodinamsko) teh tokov enako nič. Sicer se lokalne fluktuacije tokov odzovejo nanj.

Gostota vezanega toka $\vec{j}_v(\vec{r},t) = \overline{\sum_i \vec{j}_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i(t))}$

mikroskopske koordinate atomov oz. molekul v snovi

III. Maxwellova enačba

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r},t) + \mu_0 \vec{j}_v(\vec{r},t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

zunanji tok

Magnetizacija: $\vec{j}_v = \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ ~ polarizacija — časovna sprememba polarizacije

kontinuitetna enačba:

$$\nabla \cdot \vec{j}_v + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla \cdot \vec{P}}{\partial t} = 0$$

Zapisano z vektorskim poljem magnetizacije:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(upoštevam $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$)

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

III. M.e. drugače zapisano: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

jakost magnetnega polja

$\vec{H}$ ni odvisen od vezanih tokov; v snovi se razklopi na vsoto notranjega polja $\vec{B}$ in magnetizacije $\vec{M}$. Slednje predstavlja odziv snovi.

Konstitutivna relacija:

$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$ Magnetizacija v odvisnosti od zunanjega polja.

$$\vec{M}(\vec{H}) = \chi_M \vec{H} + \mathcal{O}(H^2)$$

magnetna susceptibilnost (tenzor 2. reda)

$\chi_M = \mu - 1$ μ – magnetna permeabilnost

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_M \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - (\mu - 1)\vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \; ; \; \vec{M} = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Izpustimo premikalni tok, torej imam statičen približek

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 (\nabla \times \vec{M})$$

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$; $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (to je jasno!)

$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} - \mu_0 (\nabla \times \vec{M})$ (po znani relaciji)

Greenova funkcija in Poissonova enačba:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')\, d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) d^3\vec{r}' +$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla' \cdot \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \times \vec{M}(\vec{r}')\, d^3\vec{r}'$$

$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) + {} - A \cdot (\nabla \times B)$

(zadnji integral je 0)

6-0 za rotor vektorskega polja $\frac{\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Volumen spremenimo v površinski integral, in če je volumen zadosti velik, gre površinski proti 0.

$$\oint_{(\partial V)} d\vec{S} \times \vec{A} = \int_{(V)} d^3\vec{r} (\nabla \times \vec{A})$$

Tako dobimo:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')\, d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \quad (*)$$

(**)

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\vec{r}-\vec{r}') \times \vec{m}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

primerjamo z vektorskim potencialom $\vec{A}(\vec{r})$ v primeru magnetnega dipola v točki $\vec{r}'$

$\vec{M}$ — gostota dipolnega momenta v snovi oz. gostota ekvivalentnih tokovnih zank v snovi

$\vec{M}(\vec{r}) = \vec{m}\, \delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ $\Rightarrow$ (*) se reducira na (**)

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ $\qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Ne vsebuje le dveh, ampak štiri polja ($\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$)

$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ $\qquad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$

Anizotropne snovi (npr. kristali)

$D_i = \varepsilon_{ik} \varepsilon_0 E_k$ $\qquad B_i = \mu_{ik} \mu_0 H_k$

Sklopitev med notranjim in zunanjim poljem je tu tenzorska. Torej zunanje polje v smeri z lahko inducira notranje polje v smereh x, y.

Indeks 1 prva snov, 2 - druga

$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$; $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$

$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$ $\quad E_{1t} - E_{2t} = 0$

$B_{1n} - B_{2n} = 0$ $\quad H_{1t} - H_{2t} = K$

t - tangenta; n - normalna komponenta; σ - površinska gostota naboja;
$\vec{K}$ - površinska gostota toka;

gostota m. p.

(B) $\int \nabla \cdot \vec{B}\, d^3\vec{r} = 0$ integriramo po valju

$$\oint (\vec{B}\,\vec{n})\, dS = 0 = \int_{\substack{(1)\\ \text{zg.}}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{\substack{(2)\\ \text{sp.}}} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} + \int_{\substack{pl\\ \text{plašč valja}}} (B_{pl})\, d\vec{S}$$

$$\lim_{dl \to 0} \oint \vec{B}\, d\vec{S} = \lim_{\substack{pl \to 0\\ \text{plašč}}} \int (\vec{B}_{pl} \cdot \vec{n}_{pl})\, 2\pi r\, dl = 0$$

↑ radij valja

$$\int_S (\vec{B}_1 \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2)\, dS = 0 \qquad B_{1n} = B_{2n}$$

$$(\vec{n}\,\vec{B})_1 - (\vec{n}\,\vec{B})_2 = 0$$

$\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$

(D) gostota e. p.

površinska gostota tudi na mejni površini

$$\int_{(V)} \nabla \cdot \vec{D}\, d^3\vec{r} = \int_{(V)} \rho\, d^3\vec{r} = \int_{(\partial V)} \sigma\, d\vec{S}$$

$dl \to 0,\ S \to 0$

$$\int_S (\vec{D}\,\vec{n}_1 + \vec{D}\,\vec{n}_2)\, dS = \int_S \sigma\, d\vec{S}$$

$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$ $\quad (\vec{n}\,\vec{D})_1 - (\vec{n}\,\vec{D})_2 = \sigma$

Na meji torej $\vec{D}$ preskoči!

(E) $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (gremo po pravokotni zanki)

$$\oint_C \vec{E}\, d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}\, d\vec{S}$$

Zanka C – rob pravokotnika s površino S. Pravokoten na mejno ploskev, polovica v (1), pol v (2).

$dl \to 0$: $\oint_C \vec{E}\, d\vec{s} = \vec{E}_1 \vec{t}_1\, dh + \vec{E}_2 \vec{t}_2\, dh = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} B\, dl\, dl}_{=0}$

$dl \times 2dl$

$\vec{E}_1 \cdot \vec{t}_1 + \vec{E}_2 \vec{t}_2 = 0$ $\qquad E_{1t} = E_{2t}$

$(\vec{n} \times \vec{E})_1 - (\vec{n} \times \vec{E})_2 = 0$

$\vec{t}_1 = -t_2$

zvezno

H

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\int_C \vec{H}\, d\vec{s} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \underbrace{\vec{D} \cdot d\vec{S}}_{=0}$ $\qquad J_s = \lim_{dl \to 0} (\vec{J}\, \vec{t})\, dl$

$(\vec{H}_1 \vec{t}_1 + \vec{H}_2 \vec{t}_2)\, dh = K\, dh$

$H_{1t} - H_{2t} = K$ $\qquad (\vec{n} \times \vec{H})_1 - (\vec{n} \times \vec{H})_2 = \vec{K}$

Preskočiza vrednost J_s.

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} \chi(t-t')\,\vec{E}(\vec{r},t')\,dt'$$

χ je časovno nelokalna funkcija odziva snovi na el. polje

$$\vec{P}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0\,\chi(\omega)\,\vec{E}(\vec{r},\omega) \qquad \text{v F. prostoru}$$

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} \chi(\tau)\exp(i\omega\tau)\,d\tau$$

$$\tau = t - t'$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} \chi(\tau)\exp(i\omega\tau)\,d\tau$$

$$\varepsilon(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\exp(-i\omega t)\,\varepsilon(\omega)$$

Realni del predstavlja odgovor snovi, ki je v fazi z zunanjim poljem, imaginarni del pa odgovor snovi, ki je fazno zakasnjen za $\pi/2$.

Delamo se, da je ω poljubna (tudi kompleksna).

- parnost $\varepsilon(\omega)$:

$$\varepsilon(-\omega) = 1 + \int_0^\infty \chi(\tau)\exp(-i\omega\tau)\,d\tau = \varepsilon^*(\omega)$$

kompleksna konjugirana vrednost

Ker $\varepsilon(\omega)$ v splošnem kompleksno, zapišemo:

$$\varepsilon(\omega) = \mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) + i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$$

Upoštevajoč $\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega)$ velja:

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon(-\omega) + i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(-\omega) = \mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) - i\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(-\omega)$$

oziroma $\mathrm{Re}\,\varepsilon(-\omega) = \mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega)$ (soda funkcija frekvence)

$\mathrm{Im}\,\varepsilon(-\omega) = -\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$ (liha funkcija frekvence)

- Limita $\varepsilon(\omega \to 0)$

$\varepsilon(\omega=0) = \varepsilon$ statična dielektrična konstanta (za dielektrike končna, za prevodnike neskončna)

Pri prevodnikih ima pol:

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\sigma}{i\omega} + \ldots$$

Posledica prostih nosilcev naboja (ionov, elektronov, vrzeli).

- Analitičnost $\varepsilon(\omega)$

$\omega = \mathrm{Re}\,\omega + i\,\mathrm{Im}\,\omega$

če je $\mathrm{Im}\,\omega \geq 0 \Rightarrow$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty \chi(\tau)\exp(i\omega\tau)\,d\tau = 1 + \int_0^\infty \chi(\tau)\exp(i\,\mathrm{Re}\,\omega\tau)\exp(-i\,\mathrm{Im}\,\omega\tau)\,d\tau$$

Integral konvergira, ko gre $\tau \to \infty$, tudi če je $\mathrm{Im}\,\omega$ majhen.

$\Rightarrow \varepsilon(\omega)$ analitična funkcija na zgornji polravnini ω.

Načelo kavzalnosti: $\chi(\tau) = 0$ za $\tau < 0$

$$\Rightarrow \chi(t-t') = \chi(|t-t'|)\,H(t-t')$$

Heavisedova stopnica

- Limita $\varepsilon(\omega \to \infty)$:

$$dw = \vec{E}\, d\vec{D} + \cancel{\vec{H}\, d\vec{B}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{dt} = \vec{E}\, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Imaginarna komponenta opisuje fazni zamik za $\frac{\pi}{2}$ med jakostjo in gostoto električnega polja v snovi.

$$w(2) - w(1) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial w}{\partial t}\, dt = \int dt\, \frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t)\, \vec{E}(\vec{r},\omega) =$$

$$= \int dt \int \frac{d\omega'}{2\pi} (-i\omega') \exp(-i\omega' t)\, \vec{D}(\vec{r},\omega') \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t)\, \vec{E}(\vec{r},\omega)$$

Upoštevajoč zvezo $\vec{D}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0\, \varepsilon(\omega)\, \vec{E}(\vec{r},\omega)$ prepišemo zgornjo enačbo v:

$$w(2) - w(1) = \varepsilon_0 \iint \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} (i\omega')\, \varepsilon(\omega')\, \vec{E}(\vec{r},\omega')\, \vec{E}(\vec{r},\omega) \int dt\, \exp(-i(\omega+\omega')t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i(\omega+\omega')t)\, dt = 2\pi\, \delta(\omega+\omega') \qquad T_1 \to -\infty, \quad T_2 = +\infty$$

$\omega = -\omega'$ (različno od 0)

$$w(2) - w(1) = \varepsilon_0 \int \frac{d\omega}{2\pi}\, i\omega\, \varepsilon(-\omega)\, \vec{E}(\vec{r},-\omega)\, \vec{E}(\vec{r},\omega) =$$

$$= \varepsilon_0 \int \frac{d\omega}{2\pi}\, i\omega\, \varepsilon(-\omega)\, |\vec{E}(\vec{r},\omega)|^2$$

$$w(2) - w(1) = \varepsilon_0 \int \frac{d\omega'}{2\pi} (-\omega')\, \varepsilon(\omega')\, |\vec{E}(\vec{r},\omega')|^2 = \varepsilon_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} (-i\omega)\, \varepsilon(\omega)\, |\vec{E}(\vec{r},\omega)|^2$$

$$i\varepsilon(-\omega) - i\varepsilon(\omega) = 2\,\mathrm{J}\,\varepsilon(\omega)$$

(zgornji enačbi seštejemo in upoštevamo sodost/lihost funkcije)

$$\downarrow$$

$$w(2) - w(1) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[i\omega\, \varepsilon(-\omega) - i\omega\, \varepsilon(\omega) \right] |\vec{E}(\vec{r},\omega)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int \frac{d\omega}{\pi}\, \omega\, \mathrm{J}\, \varepsilon(\omega)\, |\vec{E}(\vec{r},\omega)|^2$$

$$W(2) - W(1) = \varepsilon_0 \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \omega\, \mathrm{J}\, \varepsilon(\omega) \int_V |\vec{E}(\vec{r},\omega)|^2\, d^3\vec{r}$$

Gibalna enačba za vezani naboj:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\gamma\dot{\vec{r}} - m\omega_0^2\vec{r} + e_p\vec{E}(t)$$

dušenje kot posledica viskoznosti
ali sipanja

harmonsko
nihanje

vsiljeno nihanje zaradi
zunanjega polja

Fourierova transformacija:

$$\vec{r}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t)\, \vec{r}(\omega)$$

$$\vec{E}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t)\, \vec{E}(\omega)$$

V obliki s Fourierovi komponentami:

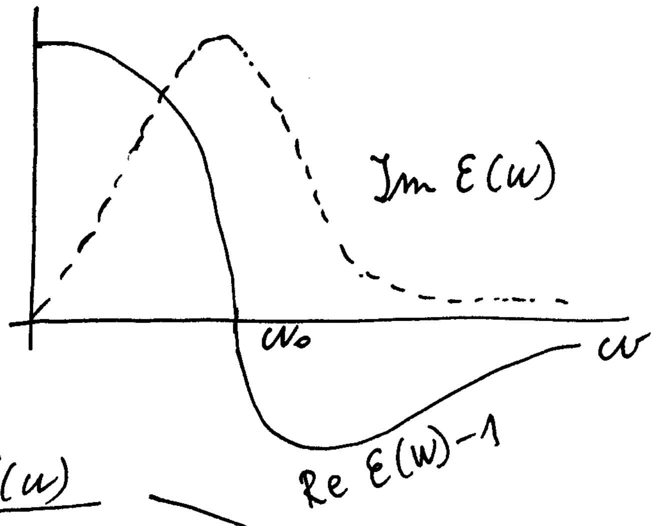
$$-m\omega^2\vec{r}(\omega) = m\gamma i\omega\vec{r}(\omega) - m\omega_0^2\vec{r}(\omega) + e_p\vec{E}(\omega)$$

$$\vec{r}(\omega) = \frac{e_p}{m}\,\frac{\vec{E}(\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\gamma\omega}$$

Polarizacija kot gostota dipolnega momenta:

$$\vec{P}(\omega) = \vec{r}(\omega)\, e_p n_p$$ — gostota vezanih nabojev

$$\vec{P}(\omega) = \frac{e_p^2 n_p}{m}\,\frac{\vec{E}(\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\gamma\omega} \quad ; \quad \text{Def.: } \vec{P}(\omega) = \varepsilon_0(\varepsilon(\omega)-1)\vec{E}(\omega)$$



$$\varepsilon_0(\varepsilon(\omega)-1) = \frac{\frac{e_p^2 n_p}{m}}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\gamma\omega}$$

Debyejeva relaksacija

zanemarimo člen, ki gre kot ω^2

D. relaksacijski čas:

$$\tau = \frac{\gamma}{\omega_0^2}$$

$$\vec{P}(\omega) = \vec{r}(\omega)e_p n_p = \frac{e_p^2 n_p}{m\omega_0^2}\,\frac{\vec{E}(\omega)}{1-i\tau\omega}$$

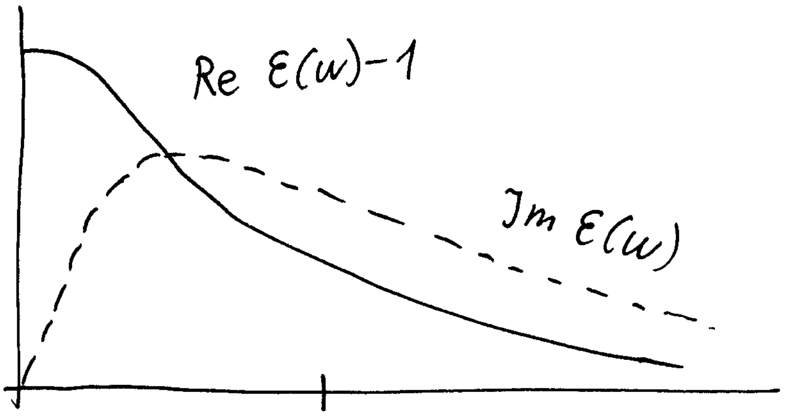
statični primer: $\vec{P}(0) = \varepsilon_0(\varepsilon(0)-1)\vec{E}(0)$

$$\vec{P}(\omega) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon(0)-1)\vec{E}(\omega)}{1-i\tau\omega} \qquad \varepsilon_0(\varepsilon(0)-1) = \frac{e_p^2 n_p}{m\omega_0^2}$$

$$\varepsilon(\omega)-1 = \frac{(\varepsilon(0)-1)(1+i\omega\tau)}{1+\tau^2\omega^2}$$

$$\mathrm{Re}\,(\varepsilon(\omega)-1) = \frac{\varepsilon(0)-1}{1+\tau^2\omega^2} \qquad \mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega) = \omega\frac{(\varepsilon(0)-1)\tau}{1+\tau^2\omega^2}$$

Debyejeva dielektrična funkcija
(majhne frekvence zunanjega polja)



če kvadriramo realni in imaginarni del ter ju seštejemo, dobimo

$$\left(\mathrm{Re}\,(\varepsilon(\omega)-1)-\frac{1}{2}(\varepsilon(0)-1)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)\right)^2=\frac{(\varepsilon-1)^2}{4}$$

krog; Cole-Coleov diagram

Lorentzova relaksacija velja pri zadosti velikih frekvencah; ohraniti moramo vse člene v gibalni enačbi.

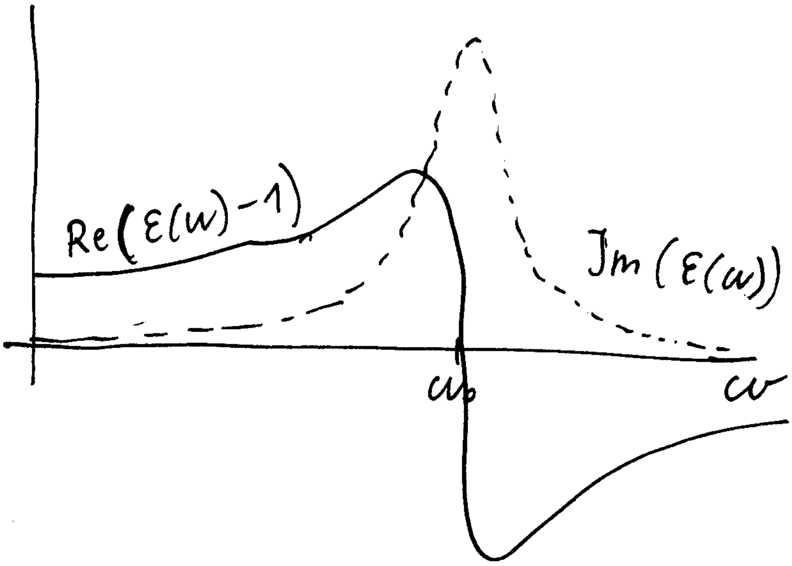
$$\vec{P}(\omega) = \vec{r}(\omega)\, e_p n_p = \frac{n_p e^2}{m} \frac{\vec{E}(\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\gamma\omega}$$

$$\varepsilon_0(\varepsilon(\omega)-1) = \frac{n_p e^2}{m[(\omega_0^2-\omega^2)-i\gamma\omega]}$$

$$\varepsilon(\omega)-1 = \frac{(\varepsilon(0)-1)\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\ ; \text{ vpeljali smo } \varepsilon(0)-1 = \frac{n_p e^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2}$$

$$\mathrm{Re}(\varepsilon(\omega)-1) = \frac{(\varepsilon(0)-1)(\omega_0^2-\omega^2)\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

$$\mathrm{Im}(\varepsilon(\omega)) = \omega\frac{(\varepsilon(0)-1)\gamma\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$



Pri zelo visokih frekvencah lahko opustimo vse člene razen gonilnega; to je sorazmeren el. polju (= vezani naboji postanejo t.r. prosti).

$$\vec{P}(\omega) = \frac{e_p^2 n_p}{m} \frac{\vec{E}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \vec{P}(\omega) = n_p e \vec{r}(\omega) = -\frac{n_p e_p^2}{m\omega^2} \vec{E}(\omega)$$

$$\varepsilon(\omega) - 1 = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

Vpeljemo plazemsko frekvenco: $\omega_p^2 = \frac{n_p e_p^2}{m\omega^2}$

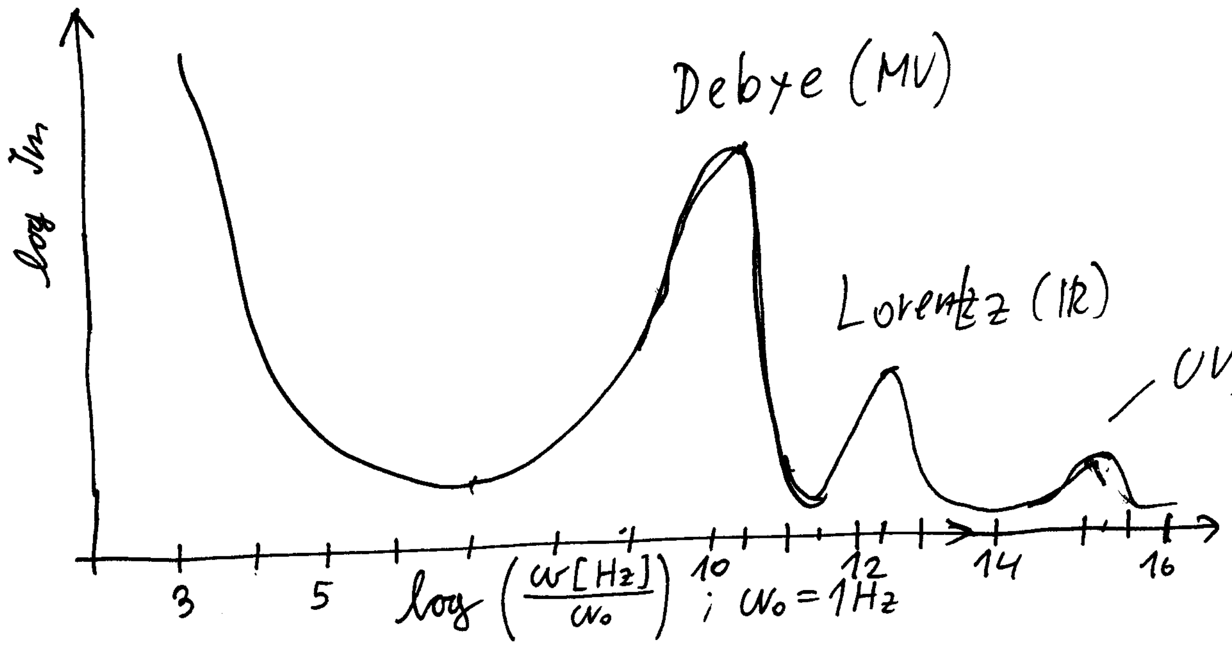
$$\left.\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right\} \text{ enačba plazemske relaksacije}$$

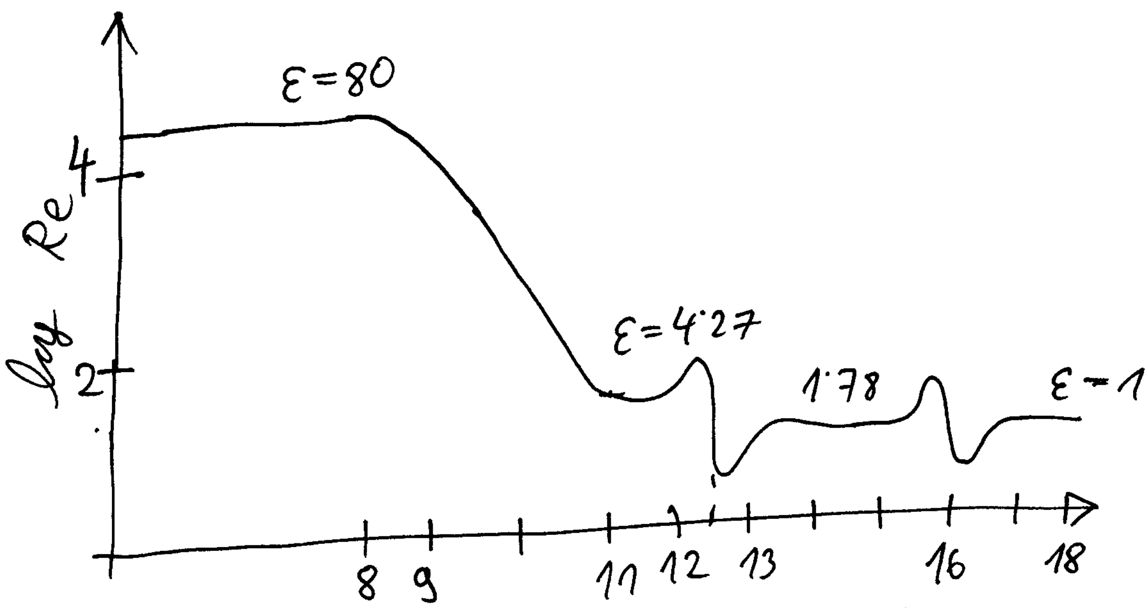
$$\lim_{\omega \to \infty} \varepsilon(\omega) = 1$$

Pri visokih frekvencah se vse snovi obnašajo kot plazemski relaksorji.

$$\mathrm{Re}(\varepsilon(\omega)) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\mathrm{Im}(\varepsilon(\omega)) = 0$$





Voda ima pri majhnih frekvencah dielektrično konstanto 78, nato začne le-ta z večanjem frekvence padati, ker molekula kot celota ne more več slediti hitrim spremembam polja. Pri frekvencah reda 10 GHz v MV območju dielektrična funkcija strmo pade na vrednost 30 (Debye relaksacija). Tu voda črpa veliko energije iz zunanjega polja, ki se troši za trenje med vrtečimi se molekulami (MV pečice, 2'5 GHz). Potem pride sprememba v funkciji zaradi atoma O in iona H, zadnji padec diel. f. pa je v UV območju – niti elektroni v molekuli ne morejo več slediti polju.

$$\varepsilon(i\omega) = 1 + \sum_i \frac{d_i}{1+\omega\tau_i} + \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 + g_i\omega + \omega^2}$$

Iz eksperimenta dobimo vrednosti konstant.

IR - efekt tople grede

Disipacija največja pri:

MV $\sim 10^{11}$ Hz

IR $\sim 10^{14}$ Hz

UV $\sim 10^{16}$ Hz

Prevodnost lahko opišemo z dielektrično funkcijo; delamo se, kot da bi imeli dejansko vezan, negibljiv naboj. To je mogoče le, če dopustimo, da ima dielektrična funkcija pol prvega reda pri $\omega=0$.

$$\vec{P}(\vec{r},t) = n(\vec{r})\, e\, \vec{r}(t)$$

Nobenih vezanih nabojev, to je predpostavka. $\Rightarrow$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = n e \vec{v}(\vec{r},t) = \frac{\partial \vec{P}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Ohmov zakon* + F. t.

$$\vec{j}(\vec{r},\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega) = -i\omega\vec{P}(\vec{r},\omega)$$

oz.

$$\vec{P}(\vec{r},\omega) = -\frac{\sigma(\omega)}{i\omega}\vec{E}(\vec{r},\omega)$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\sigma(\omega)}{i\varepsilon_0\omega}$$

$$\mathrm{Im}(\varepsilon(\omega)) = \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega} \quad \text{(torej ima pol I. reda)}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\vec{E}(\omega) = \lim_{\omega\to 0}\frac{\vec{D}(\omega)}{\varepsilon_0\varepsilon(\omega)} \to 0$$

*: $$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -m\gamma\vec{v}(t) + e\vec{E}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t}\exp(-\gamma(t-t'))\vec{E}(t')dt'$$

$$\vec{j}(t) = ne\vec{v}(t) = \frac{ne^2}{m}\int_{-\infty}^{t}\exp(-\gamma(t-t'))\vec{E}(t')dt'$$

F. integral:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int\frac{d\omega}{2\pi}\exp(-i\omega t)\vec{E}(\vec{r},\omega) \quad \& \quad \vec{j}(\vec{r},t) = \int\frac{d\omega}{2\pi}\exp(-i\omega t)\vec{j}(\vec{r},\omega)$$

$$\vec{j}(\vec{r},\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{\gamma - i\omega}$$

Upoštevamo $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ in uporabimo Maxwellovo enačbo

$\nabla \times \vec{B} = \ldots$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

upoštevam relacijo:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Big/ \quad - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

(na obeh straneh to prištejem)

oziroma

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

Lorentzova umeritev:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \leftarrow$ poseben primer Lorentzove umeritve

Coulombova: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, Weylova oz. časovna: $\phi = 0$,

aksialna: $A_z = 0$

Umeritvena transformacija:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \zeta \qquad (2)$$
$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

(1) vstavim v (2):

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \zeta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} =$$

$$= \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\nabla^2 \zeta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)$$

Lorentzova umeritev se pri transformaciji ne spremeni, če ζ zadošča enačbi:

$$\nabla^2 \zeta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0$$

IV. M. E.: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Box^2 \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \nabla\underbrace{\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}_{0}$$

$$\boxed{\Box^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}$$

Tu upoštevam Lorentzovo umeritev.

I. ME: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\nabla\left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Big/ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\Box^2 \varphi = \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}_{=0}$$

$$\boxed{\Box^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Tudi tu upoštevam Lorentzovo umeritev.

$$\Box^2 \varphi = \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\Box^2 \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

rešitvi sta retardirana potenciala

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Do rešitve bi sicer se lahko prišlo z uporabo Greenovih funkcij. Zapisal bom rešitev in preveril, če je pravilna.

Upoštevam enakosti:

$$\nabla|\vec{r}-\vec{r}'| = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\nabla^2 |\vec{r}-\vec{r}'| = \frac{2}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Najprej velja:

$$\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec{r}' \left\{\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\rho + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|\right)\right\}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec{r}' \left\{\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\rho + \nabla\frac{1}{c|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(-\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|\right) + \right.$$
$$+ \nabla\frac{1}{c|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(-\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|\right) + \frac{1}{c^2|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\left(\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|\right)^2 +$$
$$\left. + \frac{1}{c|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(-\nabla^2|\vec{r}-\vec{r}'|\right)\right\}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec{r}' \left\{\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\rho + \frac{1}{c^2|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\right\}$$

Potencial točkastega naboja zadošča Poissonovi enačbi:

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\int d^3\vec{r}'\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\rho\left(\vec{r},t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}_{\rho(\vec{r},t)} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underbrace{\int\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3\vec{r}'}_{\varphi(\vec{r},t)} =$$
$$= -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$$

Zaradi simetričnosti enačb lahko po podobnosti poleg električnega potenciala zapišemo še magnetni potencial $\vec{A}$:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

To sta retardirana potenciala. Če se potencial spremeni ob času t, se naboj spremeni že prej – $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$

Prostorsko – časovne koordinate EM potencialov so na svetlobnem stožcu izvorom EM polja, velja:

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 - c^2(t-t')^2 = 0$$

Poyntigov vektor: $\vec{S}(\vec{r},t)=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)$

Električno in magnetno polje časovno spremenljivega dipola na veliki razdalji od dipola (sevalni približek):

$$\vec{B}\cong\frac{\mu_0}{4\pi c|\vec{r}|}\left(\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{|\vec{r}|}{c}\right)\times\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t)\cong\frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|}\left(\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{|\vec{r}|}{c}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}$$

Vektorska identiteta: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

Obe polji sta si med seboj pravokotni:

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\times\vec{E}(\vec{r},t)\right)\quad \text{ali}\quad \vec{E}(\vec{r},t)=c\vec{B}(\vec{r},t)\times\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{S}(\vec{r},t)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\times\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\times\vec{E}(\vec{r},t)\right)\right)$$

Upoštevam zgornjo identiteto: el. polje pravokotno na $\vec{r}$

$$\vec{S}(\vec{r},t)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}E^2(\vec{r},t)-\vec{E}(\vec{r},t)\overbrace{\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\right)}^{=0}\right)$$

$$\vec{S}(\vec{r},t)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2(\vec{r},t)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\qquad S_n(\vec{r},t)=\vec{S}\frac{\vec{r}}{r}$$

Radialni del Poyntingovega vektorja:

$$S_n(\vec{r},t)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\mu_0^2}{(4\pi r)^2}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\times\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{|\vec{r}|}{c}\right)\right)^2$$

(površinski integral Poyntingovega vektorja, velika krogelna površina, ...)

Za EM poljo, ki imata obliko sevalnih polj časovno spremenljivega dipola:

$$P_n=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\mu_0^2|\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})|^2\sin^2\theta}{(4\pi r)^2}$$

θ je kot med smerjo $\ddot{\vec{p}}$ in $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Realni del Poyntingovega vektorja za sevalno polje časovno spremenljivega dipola:

$$P_n(\vec{r},t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\mu_0^2\,|\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})|^2 \sin^2\Theta}{(4\pi r)^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint P_n\, dS \;;\quad dS = r^2 d\Omega; \quad d\Omega = 2\pi \sin\Theta\, d\Theta$$

Celotna gostota energijskega toka, ki teče skozi oddaljeno krogelno površino, ki zaobjema sevajoči dipol, je

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint P_n\, dS = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\mu_0^2\,|\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})|^2}{(4\pi)^2\, r^2}\,2\pi r^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin^2\Theta\,\sin\Theta\, d\Theta}_{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\mu_0^2\,|\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})|^2}{6\pi} = -\gamma W$$

$$|\ddot{\vec{p}}(t-\tfrac{r}{c})|^2 = \omega^4 e^2 |a|^2$$

Celotna energija na časovno enoto, ki jo v prostor izseva časovno spremenljiv dipolni izvor. Kotna porazdelitev ima maksimum na smer $\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})$. V tem je podobna sevanju pospešenega naboja, kjer sta pospešek in hitrost vzporedna.

$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ – Lorentzova sila na točkast gibajoči se naboj

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}) = -e\nabla\varphi - e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e(\vec{v} \times \nabla \times \vec{A})$$

Notri sem dal $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ in $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Uporabim zvezo $\vec{v} \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$

$$-e\nabla\varphi - e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - e(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} =$$

$$= -e\nabla\varphi - e\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{A}\right) + e\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A})$$

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$$

$$m\dot{\vec{v}} = -e\nabla\varphi + e\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - e\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}) = -\nabla(e\varphi - e\vec{v} \cdot \vec{A})$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}\right)\right] = -\nabla(e\varphi - e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right] - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

Lagrangeova funkcija nabitega delca v EM polju:

$$L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}(t)^2 - e\varphi(\vec{r}(t), t) + e\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{A}(\vec{r}(t), t)$$

Izraža se s potenciali in ne polji!

Umeritvena transformacija – ohranja vrednosti EM polj, ne pa tudi potencialov.

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \nabla \varsigma(\vec{r},t)$$
$$\varphi'(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \varsigma(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Akcija delca:

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)\, dt = \int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} - e\varphi(\vec{r},t) + e\,\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) \right) dt$$

$$S' = \int_{(1)}^{(2)} \left[\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e\varphi + e\frac{\partial \varsigma}{\partial t} + e\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A} + e(\dot{\vec{r}}\nabla)\varsigma \right.$$

nova akcija upoštevajoč Um. trans.

$$\varsigma = \varsigma(\vec{r},t)$$

$$\frac{d\varsigma}{dt} = \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + (\dot{\vec{r}}\cdot\nabla)\varsigma$$

$$S' = S + e\int_1^2 \frac{d\varsigma}{dt}\, dt = S + e\left(\varsigma(1) - \varsigma(2)\right)$$

Drugi člen transformirane akcije S' je drugačen le na robovih, to pa nima vpliva na Euler-Lagrangeove enačbe.

Hamiltonova funkcija (hamiltonka) je definirana:

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{r},t) = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{p} - L$$

Posplošeni impulz: $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}$

V primeru EM polja: $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}$

$$\rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{m}(\vec{p}-e\vec{A})\vec{p} - \frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A})^2 + e\varphi - e\vec{A}\left(\frac{\vec{p}-e\vec{A}}{m}\right)$$

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{r},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}(t) - e\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + e\varphi(\vec{r},t)$$

Tako obliko sklopitve med poljem in delcem imenujemo tudi <u>minimalna sklopitev</u>.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \quad ; \quad \dot{\vec{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$$

Zgornja oblika hamiltonke ne vsebuje polja, ki ga ustvarja sam delec in zaradi katerega bi seval ter še dodatno izgubljal energijo.

$$L=\int_{(V)} \mathcal{L}(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} = \int_{(V)} \mathcal{L}_p(\vec{r},t) - \int_{(V)} \rho(\vec{r},t)\,\varphi(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} + \int_{(V)} \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\, d^3\vec{r}$$

} gostota Lagrangeove funkcije za EM polje in njegove izvore

$$\mathcal{L}_p(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(\vec{r},t)-\frac{1}{2\mu_0}B^2(\vec{r},t)$$

Drugačen zapis:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 - \rho\varphi - \left(\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} - \vec{j}\cdot\vec{A}\right)$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\ ; \quad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\ ; \quad \varphi=\varphi(\vec{r},t)\ ; \ \vec{A}=\vec{A}(\vec{r},t)$$

$$S=\int_{(V)}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\vec{A})^2-\rho\varphi+\vec{j}\cdot\vec{A}\right]d^3\vec{r}\,dt=$$

$$=\int_{(V)}\mathcal{L}\left[\varphi(\vec{r},t),\vec{A}(\vec{r},t)\right]d^3\vec{r}\,dt$$

$$S=\int\mathcal{L}\left[\varphi(\vec{r},t),A_i(\vec{r},t)\right]d^3\vec{r}\,dt$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}\right)+\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=0$$

$i=x,y,z$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}\right)+\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla A_i)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_i}=0$$

$$\nabla\left[\varepsilon_0\left(\nabla\varphi+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\right]+\rho=0$$

$$\varepsilon_0\nabla^2\varphi+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=0$$

& upoštevajoč Lorentzovo umeritev za oba potenciala

$$\boxed{\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

b) za $\vec{A}$ oz A_x

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)\right)+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)}\right)}_{=0}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)}\right)-j_x=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{A_x}{\partial y}\right)}=-\frac{1}{2\mu_0}\,2\vec{B}\,(0,0,-1)=\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{A}\right)(0,0,1)=\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{A}\right)_z$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}-\left(-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{A}\right)_z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{A}\right)_y\right)\right)=j_x$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=j_x$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu_0}\nabla^2 A_x+\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}_{=0}=j_x$$

$$\boxed{\nabla^2 A_x-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}=-\mu_0 j_x}$$

Podobno še za y in z komponento.

$$\Rightarrow\ \boxed{\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}}$$

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)_z=\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)_y=\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)_x=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)$$

Maxwellove enačbe niso invariantne na Galilejevo transformacijo, so pa na Lorentzovo. Ta ohranja

$\vec{r}\vec{r} - c^2t^2 = \vec{r}'\vec{r}' - c^2t'^2$

Imamo sistema S in S', velja $z'=z$ in $y=y'$. Vrtel bom le dve koordinati, to je x in t.

Matematični podvh:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

$$x^2+y^2 = x'^2+y'^2$$

(Transformacija ohranja velikost vektorja.)

V primeru x in t:

$$x' = x\cos\varphi + ict\sin\varphi$$
$$ict' = -x\sin\varphi + ict\cos\varphi$$
$$x^2 + (ic)^2t^2 = x'^2 + (ic)^2t'^2$$

Nastaveh $\varphi \to i\varphi$;
$\sin(i\varphi) = i\sinh\varphi$
$\cos(i\varphi) = \cosh(\varphi)$

$$x' = x\cosh(\varphi) - ct\sinh(\varphi)$$
$$ict' = -ix\sinh(\varphi) + ict\cosh(\varphi)$$
$$ct' = -x\sinh(\varphi) + ct\cosh(\varphi)$$

Grem v S' v $x'=0$. S' se giblje s hitrostjo v, $x=vt$.

$$x' = 0 = vt\cosh(\varphi) - ct\sinh(\varphi)$$

$$\boxed{\tanh(\varphi) = \frac{v}{c} = \beta}$$

$$\cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

$$\sinh\varphi = \tanh\varphi\cosh\varphi = \beta\gamma$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Lorentzova transformacija

$$x' = x\gamma - c\gamma\beta t$$
$$ct' = -\gamma\beta x + c\gamma t$$

$S \to S'$

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Lorentzova matrika

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \Lambda_\nu{}^\mu \qquad x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$$

za kontravariantni štirivektor položaja

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \Lambda^\mu{}_\nu \qquad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

Valovna enačba je invariantna na Lorentzovo transformacijo

$$\Box'^2 = \Box^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} = \gamma\frac{\partial}{\partial x} + \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} = \gamma v\frac{\partial}{\partial x} + \gamma\frac{\partial}{\partial t}$$

še 1x odvajam: (ali kar kvadriram)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} &= \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t} + \gamma^2\left(\frac{v}{c^2}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= \gamma^2 v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\gamma v\frac{\partial^2}{\partial x\partial t} + \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad /\cdot\frac{1}{c^2} \end{aligned}\right\} -$$

Odvoda po y' in z' nas ne zanimata, ker se pri transformaciji ne spremenita

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Box'^2 = \Box^2}$$

Štirivektor je vsak urejeni četverec, katerega komponente se pri transformaciji iz S v S' transformirajo enako kot štirivektor položaja

Prostor (3D) dopolnimo s četrto komponento, ki naj bo enaka ct. V 4D prostoru imamo tako kovariantni štirivektor.

$$x_\mu = (x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ct)$$

Kontravariantni štirivektor položaja

$$x^\mu = (x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z,\ x^4 = -ct)$$

Lorentzova transformacija ohranja produkt $\vec{r}^{\,2} - (ct)^2$, lahko rečemo, da ohranja kvadrat štirivektorja:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{SUMACIJSKO PRAVILO}}}{x_\mu x^\mu} = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu x^\mu = x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 + x_4 x^4 =$$
$$= \vec{r}\cdot\vec{r} - c^2 t^2 = x'_\mu x'^\mu$$

Transformacijske enačbe

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu} x_\nu \qquad x_\mu = \underset{\substack{\parallel \\ \Lambda^\mu_{\ \nu}}}{\Lambda^{-1}{}_\mu{}^\nu} x'_\nu$$

$$\Lambda_\mu^{\ \nu} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

za kontravariantne:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu \qquad x^\mu = \underset{\substack{\parallel \\ \Lambda_\mu^{\ \nu}}}{\Lambda^{-1}{}^\mu{}_\nu} x'^\nu$$

$$\Lambda^\mu_{\ \nu} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Element razdalje v prostoru Minkowskega

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} - c^2 dt^2$$

Definicija lastnega časa: $\boxed{dx_\mu dx^\mu = -c^2 d\tau^2}$

τ - lastni čas, je invarianta

Dolžina (velikost) štirivektorja je skalar, zato se ne transformira pri prehodu iz enega sistema v drugega. Tudi c je skalar, prav tako $d\tau$ in zato invarianta za Lorentzovo transformacijo.

Zveza med lastnim časom in običajnim časom:

Delec se giblje z $\vec{v}$ in je (zanj) $d\vec{r} = \vec{v} dt$

$$-c^2 d\tau^2 = d\vec{r}^{\,2} - c^2 dt^2$$

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} = dt\sqrt{1-\beta^2}$$

Lastni čas v vseh koordinatnih sistemih identičen, je invarianta. Lokalni čas t se spreminja v odvisnosti od opazovalca in njegove lokalne hitrosti.

Četverec hitrosti: $u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx_\mu}{dt} = \gamma(\vec{v}, c)$

btw: $u_\mu u^\mu = \gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2 = -c^2$

Imamo sistema S in S', med seboj se gibljeta z relativno hitrostjo u. Imamo dve hitrosti, u in v_x, zato imamo γ_u in γ.

Lorentzova transformacija:

$$a_1' = \gamma_u \left(a_1 - \frac{u}{c} a_4\right)$$
$$a_2' = a_2$$
$$a_3' = a_3$$
$$a_4' = \gamma_u \left(a_4 - \frac{u}{c} a_1\right)$$

$$\gamma' v_x' = \gamma_u (\gamma v_x - \gamma u) = \gamma_u \gamma (v_x - u)$$
$$\gamma' v_y' = \gamma_u \gamma v_y$$
$$\gamma' v_z' = \gamma_u \gamma v_z$$
$$\gamma' c = \gamma_u \left(\gamma c - \gamma \frac{u}{c} v_x\right) = \gamma_u \gamma \left(c - \frac{u}{c} v_x\right)$$
$$\gamma' = \gamma_u \gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)$$

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

$$v_{y,z}' = \frac{v_{y,z}}{\gamma_u \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)}$$

Še en način: v_x – hitrost delca v S; v_x' – hitrost v S'

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right)} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

$$p_\mu = m u_\mu = m \frac{dx_\mu}{d\tau} = m\gamma \frac{dx_\mu}{dt} = \gamma(\vec{p}, mc) =$$
$$= \left(\gamma \vec{p}, \frac{E}{c}\right)$$

$E = \gamma m c^2$ – polna energija telesa

$$p_\mu p^\mu = \gamma^2(\vec{p}, mc)(\vec{p}, -mc) = \gamma^2(p^2 - m^2c^2) =$$
$$= \gamma^2 m^2 (v^2 - c^2) = \frac{-1}{1-\beta^2} m^2c^2(1-\beta^2) = -m^2c^2$$

$$\boxed{p_\mu p^\mu = -m^2c^2} \Big/ \frac{d}{d\tau}$$ (masa telesa je invariantna)

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} p^\mu + p_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0$$

(upoštevamo še, da je metrični tenzor simetričen)

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} p^\mu = p_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0$$

Sila Minkowskega: $F_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$; velja:

$$F_\mu p^\mu = F^\mu p_\mu = 0$$

$\Rightarrow$ štirivektor gibalne količine v prostoru Minkowskega vedno pravokoten na štirivektor sile!

$p_\mu p^\mu$

oz. $u_\mu u^\mu = \text{konst.}$

Štirivektor EM potenciala: $\boxed{\begin{array}{l} A_\mu = (\vec{A}, \frac{\varphi}{c}) \\ A^\mu = (\vec{A}, -\frac{\varphi}{c}) \end{array}}$

$\Box^2 A_\mu = -\mu_0 j_\mu$

$\Box^2 A^\mu = -\mu_0 j^\mu$

Kovariantna nvja nabitega delca v zunanjem EM polju:

$$S = \int_{(1)}^{(2)} (m u_\mu u^\mu + e A^\mu u_\mu) d\tau \qquad u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

$$u_\mu u^\mu = -c^2$$

$$S = -mc^2 \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt + e\int_{(1)}^{(2)} \vec{A}\vec{v}\, dt - e\int \varphi\, dt =$$

$$= \int \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\, dt$$

Relativistična Lagrangeova funkcija:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e\vec{A}\vec{v} - e\varphi$$

E-L enačba: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -e\nabla\varphi + e\nabla(\vec{A}\cdot\vec{v}) - e\frac{d\vec{A}}{dt} =$$

$$= -e\nabla\varphi - e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + e\left(\nabla(\vec{A}\cdot\vec{v}) - (\vec{v}\nabla)\vec{A}\right)$$

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{A}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{v}) - (\vec{v}\nabla)\vec{A} = \vec{v}\times\nabla\times\vec{A}$$

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}(m\gamma\vec{v}) = e\gamma\vec{E} + e\gamma\vec{v}\times\vec{B}}$$

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B}$$

Štirivektor gostote toka: $j_\mu = \frac{\rho}{\gamma} u_\mu = \frac{\rho}{\gamma}(\gamma \vec{v}, \gamma c)$

oz. $\boxed{j_\mu = (\vec{j}, c\rho) \qquad j^\mu = (\vec{j}, -c\rho)}$

štirivektor EM potenciala: $A_\mu = (\vec{A}, \frac{\varphi}{c})$ in $A^\mu = (\vec{A}, -\frac{\varphi}{c})$

Schwarzschildova invarianta: $-\rho\varphi + \vec{j}\vec{A} = A^\mu j_\mu = A_\mu j^\mu$

$\rho = \rho(\vec{r}, t) \qquad \vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$

$\varphi = \varphi(\vec{r}, t) \qquad \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\int \vec{A}\vec{j}\, d^3\vec{r}\, dt - \int \varphi\rho\, d^3\vec{r}\, dt = \int A^\mu j_\mu d^4x_\mu = \int A_\mu j^\mu d^4x_\mu$$

Tudi volumski element je v 4D prostoru invarianta

$$d^4x'_\mu = \underbrace{(\det \Lambda_{\mu\nu})}_{=1} d^4x_\mu = d^4x_\mu$$

Skalarni produkt štirivektorjev je skalar, to pa je neobčutljiv na Lorentzovo transformacijo, ki ustreza vrtežu v 4D prostoru Minkovskega.

Naboj mora biti invarianten na Lorentzovo transformacijo. Sicer bi ga lahko izgubljali ali pridelovali s tem, da nabit delec opazujemo iz različnih i. sistemov.

$$e = \int_{(V)} \rho\, d^3\vec{r} = \int_{(V')} \rho' d^3\vec{r}\,'$$

$d^3\vec{r}\,' = dx'dy'dz'$

Transformira se zgolj dx':

$dx' = \gamma\, dx$

Torej velja: $\int_{(V)} \rho\, d^3\vec{r} = \int_{(V')} \rho' d^3\vec{r}\,' = \int_{(V)} \rho' \gamma\, d^3\vec{r}$

To pomeni: $\boxed{\frac{\rho}{\gamma} = \text{inv.}}$

Naboj sam je invarianten, gostota naboja ni.

Riemann – Sommerfeldove enačbe v kovariantni obliki

$$\Box^2 A_\mu = -\mu_0 j_\mu \quad \text{oz.} \quad \Box^2 A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

Z leve delujemo s kovariantnim štirivektorjem gradienta ∂^μ, tako dobimo:

$$\Box^2(\partial_\mu A^\mu) = -\mu_0(\partial_\mu j^\mu) \quad (1)$$

Kontinuitetna enačba v kovariantni obliki:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = \partial_\mu j^\mu = \partial^\mu j_\mu$$

Sledi, da je v (1) na desni strani 0.

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad \& \quad \partial^\mu A_\mu = 0$$

Razpišem po komponentah:

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial(\varphi/c)}{c\,\partial t} =$$

$$= \nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Lorentzova umeritev; posledica kontinuitetne enačbe in tako posledica ohranjevanja naboja.

a) kovariantne komponente tenzorja EM polja:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

b) kontravariantne komponente tenzorja EM polja:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = g^{\mu\gamma} g^{\nu\kappa} F_{\gamma\kappa}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & \frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & \frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \sum_{\mu}\sum_{\nu} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = B_z^2 + B_y^2 - \frac{E_x^2}{c^2} + B_z^2 + B_x^2 - \frac{E_y^2}{c^2} + B_x^2 + B_y^2 - \frac{E_z^2}{c^2} - \frac{E_x^2}{c^2} - \frac{E_y^2}{c^2} - \frac{E_z^2}{c^2}$$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)$$

Gostota Lagrangeove funkcije za EM polje:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon_0 c^2}_{=\frac{1}{\mu_0}}\left[\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right]$$

To je do konstante enako Lagrangeovi funkciji EM polja. Le-ta je Lorentzovo invariantna.

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right) = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$\vec{j}\vec{A} - \rho\varphi = A^{\mu}j_{\mu}$$

$$d^3\vec{r}\,dt = d^4x_r$$

$$\Rightarrow S = \int\left(-\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu r}F_{\mu r} + A^{\mu}j_{\mu}\right)d^4x_r$$

akcija za EM polje in njegove izvore

Definicija tenzorja EM polja:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \quad \Big/ \text{odvajam po } \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu x^\mu} A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \underbrace{\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right)}_{=0} = \Box^2 A^\nu = -\mu_0 j^\nu$$

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = 0$$

Lorentzova umeritev $\quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) = \partial_\mu$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = -\mu_0 j^\nu \rightarrow \text{Po komponentah je to:}$$

$$\nu = 1 \quad \frac{\partial F^{\mu 1}}{\partial x^\mu} = 0 - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\mu_0 j_x$$

$$(\nabla \times \vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = +\mu_0 j_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Podobno tudi za $\nu = 2, 3$.

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$ IV. Maxwellova enačba

$$\nu = 4 \Rightarrow \frac{\partial F^{\mu 4}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial z} + 0 = \mu_0 c \rho$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ I. Maxwellova enačba

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & \frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & \frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

Drugi dve Maxwellovi enačbi se izpelje s pomočjo dualnega tenzorja EM polja $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{c}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$ ($\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ je popolnoma antisimetrični kontravariantni tenzor 4. reda). Potem lahko ti dve Maxwellovi enačbi zapišem kot:

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_z & E_y & cB_x \\ E_z & 0 & -E_x & cB_y \\ -E_y & E_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu = 1: \quad 0 - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{1}{c}c\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$(\nabla\times\vec{E})_x = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \qquad \boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$ III. Maxwellova enačba

(podobno za $\mu = 2,3 \Rightarrow$)

Za $\mu = 4$ dobim:

$$-c\frac{\partial B_x}{\partial x} - c\frac{\partial B_y}{\partial y} - c\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$$ II. Maxwellova enačba

$$\boxed{\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = -\mu_0 j^{\nu}} \qquad F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & \frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & \frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$\nu = 1: \quad 0 - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\mu_0 j_x$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \vec{B})_x = \mu_0 j_x + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Podobno dobim še za $\nu = 2,3 \Rightarrow$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$ IV. Maxwellova enačba

$$\nu = 4: \quad \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\mu_0 c \rho$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ I. Maxwellova enačba

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \frac{c}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$$ – dualni tenzor EM polja

Kinematični Maxwellovi enačbi zapišem kot: $\frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_z & +E_y & cB_x \\ E_z & 0 & -E_x & cB_y \\ -E_y & E_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{bmatrix}$$

$\mu = 1$:

$$0 - \frac{E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial \cancel{z}} - \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$-(\nabla \times \vec{E})_x - \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

III. Maxwellova enačba

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_z & E_y & cB_x \\ E_z & 0 & -E_x & cB_y \\ -E_y & E_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{bmatrix}$$

$\mu = 4$: $\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$ II. M. e.

Kinematični Maxwellovi enačbi bi s pomočjo tenzorja EM polja zapisali tako:

$$\frac{\partial F_{\mu\omega}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\omega} + \frac{\partial F_{\omega\nu}}{\partial x^\mu} = 0$$

Lorentzova sila:

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\gamma\vec{v}\right)=\gamma\, \overbrace{e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})}^{\vec{F}} \rightarrow 3 \text{ komponente}$$

4. komponente sile dobim če $F_\mu p^\mu = 0$

$$\gamma\vec{F}\gamma m\vec{v} - F_4\gamma m c = 0$$

$$F_4 = \frac{\gamma}{c}\vec{F}\vec{v} = \frac{\gamma}{c}\left(e\vec{E}\vec{v} + e\overbrace{(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}}^{0}\right)$$

$$\boxed{F_4 = \frac{\gamma e}{c}\vec{E}\vec{v}} \quad \text{MOČ}$$

če pogledamo po komponentah, dobimo:

$$F_\mu = eF_{\mu\nu}u^\nu = e\begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \\ -\gamma c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e\gamma(B_z v_y - B_y v_z + E_x) \\ e\gamma(-B_z v_x + B_x v_z + E_y) \\ e\gamma(B_y v_x - B_x v_y + E_z) \\ \frac{e\gamma}{c}(E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z) \end{bmatrix}$$

Kovariantna oblika sile na točkast naboj je:

$$F_\mu = eF_{\mu\nu}u^\nu \qquad F^\mu = eF^{\mu\nu}u^\nu$$

Vpeljem gostoto Lorentzove sile: $f_\mu = F_{\mu\nu}j^\nu$

$$f^\mu = g^{\mu\nu}f_\nu = F^\mu{}_\nu j^\nu$$

Z upoštevanjem Maxwellove enačbe:

$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = -\mu_0 j^\nu$ pridem do:

$$\boxed{f^\mu = \frac{\partial T^{(p)\mu k}}{\partial x^k}}$$, kjer vpeljem 4D napetostni tenzor EM polja:

$$T^{(P)\mu k} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu}{}_{\lambda} F^{\lambda k} + \frac{1}{4} g^{\mu k}\left(F_{\lambda\pi} F^{\lambda\pi}\right)\right)$$

$$T^{(P)\mu\nu} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \frac{P_x}{c} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \frac{P_y}{c} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} & \frac{P_z}{c} \\ \frac{P_x}{c} & \frac{P_y}{c} & \frac{P_z}{c} & -W \end{bmatrix}$$ je simetričen

σ_{ij} so elementi tenzorja napetosti EM polja.
(npr. $\sigma_{11} = \varepsilon_0 E_x^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B_x^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2$)
Poyntigov vektor je $\vec{P} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$, torej $P_x = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})_x$
Gostota energije je $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

$$T^{(P)\mu k} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu}{}_{\lambda} F^{\lambda k} + \frac{1}{4} g^{\mu k}\left(F_{\lambda\pi} F^{\lambda\pi}\right)\right)$$ je simetričen!

$$T^{(P)11} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{1}{}_{\lambda} F^{\lambda 1} + \frac{1}{4} \overset{=1}{g^{11}} \left(2\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(-B_z^2 - B_y^2 + \frac{E_x^2}{c^2} + \frac{1}{2}\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)\right)$$

$$T^{(P)11} = \varepsilon_0 E_x^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B_x^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \sigma_{11}$$

podobno dobim σ_{22} in σ_{33}

$$F^{\mu}{}_{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{\mu\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & \frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & \frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(T^{(P)11} = \varepsilon_0 E_x^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B_x^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \sigma_{11}\right)$$

$$T^{(P)12} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{1}{}_{\lambda} F^{\lambda 2} + \frac{1}{4} \overset{=0}{g^{12}} \left(F_{\lambda\pi} F^{\lambda\pi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[B_x B_y + \frac{1}{c^2} E_x E_y\right] = \frac{B_x B_y}{\mu_0} + \varepsilon_0 E_x E_y$$

$$T^{(P)23} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{2}{}_{\lambda} F^{\lambda 3} + \frac{1}{4} g^{23}\left(F_{\lambda\pi} F^{\lambda\pi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[B_z B_y + \frac{E_y}{c}\frac{E_z}{c}\right] = \frac{B_z B_y}{\mu_0} + \varepsilon_0 E_y E_z = \sigma_{23}$$

$$T^{(P)31} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^3{}_\lambda F^{\lambda 1} + \frac{1}{4} g^{31}\left(F_{\lambda\pi} F^{\lambda\pi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[B_z B_x + \frac{E_z E_x}{c^2}\right] = \frac{B_z B_x}{\mu_0} + \varepsilon_0 E_z E_x = \sigma_{31}$$

Napetostni tenzor EM polja:

$$T_{ik} = \varepsilon_0 \left(E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_k - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ik}\right)$$

$$T_{ik} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$T^{(P)\mu k} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{\mu}{}_{\lambda} F^{\lambda k} + \frac{1}{4} g^{\mu k}\left(F_{\lambda\pi} F^{\lambda\pi}\right)\right]$$

Poyntingov vektor: $\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$

$$F^{\mu}{}_{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{\mu\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & \frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & \frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{(P)14} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{1}{}_{\lambda} F^{\lambda 4} + 0\right] = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{c} B_z E_y - \frac{1}{c} B_y E_z\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}(\vec{E} \times \vec{B})_x = \frac{1}{c}\mathcal{P}_x$$

$$T^{(P)24} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{2}{}_{\lambda} F^{\lambda 4}\right] = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{1}{c} B_z E_x + \frac{1}{c} B_x E_z\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}(\vec{E} \times \vec{B})_y = \frac{1}{c}\mathcal{P}_y$$

$$T^{(P)34} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{3}{}_{\lambda} F^{\lambda 4}\right] = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{c} E_x B_y - \frac{1}{c} B_x E_y\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}(\vec{E} \times \vec{B})_z = \frac{1}{c}\mathcal{P}_z$$

$$T^{(P)44} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{4}{}_{\lambda} F^{\lambda 4} + \frac{1}{4} \overset{=1}{g^{44}}\left(F_{\lambda\pi} F^{\lambda\pi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[-\frac{E^2}{c^2} - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2}\right] =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 - \frac{1}{2\mu_0}B^2 = -w$$

$$f^{\mu} = \frac{\partial T^{(P)\mu k}}{\partial x^k}$$

$$f_1 = \frac{\partial T^{(P)1k}}{\partial x^k} = \frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x^k} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S_x}{c}\right) = \frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_k} - \underbrace{\frac{1}{c^2\mu_0}}_{=\varepsilon_0}\frac{\partial(\vec{E}\times\vec{B})_1}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B}\right)_1 = \frac{\partial}{\partial t} g_1 = \frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_k} - f_1$$

Posplošitev za $i=1,2,3$: $\boxed{\frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0}$

CAUCHYJEVA ENAČBA
(ohranitev gibalne količine)

$$f^4 = -\frac{\vec{j}\vec{E}}{c} = \frac{\partial T^{(P)4k}}{\partial x^k} = \frac{1}{c}\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$-\vec{j}\vec{E} = \nabla\vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{S} + \vec{j}\vec{E} = 0}$$

ohranitveni zakon za energijo

A

Vpeljemo Hertzov sevalni vektor $\vec{Z}$.

Riemann–Lorenz:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

Lorentzov umeritveni pogoj:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$\vec{Z}(\vec{r}, t)$: – sevalni potencial

$$\vec{A} = \mu_0 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \qquad \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla \cdot \vec{Z}$$ (konsistentno z Lorentzovo umeritvijo)

Vektor elektrodinamskih izvorov: $\vec{J}(\vec{r}, t)$

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \qquad \rho = -\nabla \cdot \vec{J}$$ (zadošča k. enačbi)

R–L se zreducira na eno enačbo:

$$\nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\vec{J}$$ (veliki J!)

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'$$

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{Z}) \qquad \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla(\nabla \cdot \vec{Z}) - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2}$$

Razvoj po multipolih, najnižji red:

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi|\vec{r}|}\int_V \vec{J}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) d^3\vec{r}\,'$$

$$\int_V \vec{j}(\vec{r}, t)\, d^3\vec{r} = -\int_V \vec{r}\,(\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t))\, d^3\vec{r} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{r}\,\rho(\vec{r}, t)\, d^3\vec{r}$$

$$\int_V \vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) d^3\vec{r}\,' = \frac{\partial}{\partial t}\int \vec{J}\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) d^3\vec{r}\,' =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{r}\,'\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) d^3\vec{r}\,'$$

Torej:

$$\int_V \vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) d^3\vec{r}' = \int_V \vec{r}' \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) d^3\vec{r}' = \vec{p}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)$$

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) \approx \frac{\vec{p}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)}{4\pi |\vec{r}|} \quad (*)$$ ← Hertzov sevalni potencial

---

Dipolno sevanje skozi Hertzovo teorijo

$$\vec{B} \cong -\frac{\mu_0}{c} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \times \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} \qquad \vec{E} \cong \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2}\right)$$

$$\nabla \cong -\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\vec{r}}{c|\vec{r}|} \qquad \nabla \times = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\left(\frac{\partial}{c\,\partial t}\right)\times$$

Iz enačbe sevalnega potenciala (*)

$$\frac{\partial^2 \vec{Z}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \cong \frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)}{4\pi |\vec{r}|}$$

Obe polji v sevalnem približku:

$$\vec{B} \cong -\frac{\mu_0}{4\pi c |\vec{r}|}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \times \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

$$\vec{E} \cong \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \times \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \times \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\right)$$

↑ upoštevajoč vektorsko identiteto $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B})$

Obe polji sta med seboj pravokotni:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \times \vec{E}(\vec{r}, t)\right)$$

B

Imamo naboj v prostoru, ki se giblje po trajektoriji $\vec{r}(t)$ s hitrostjo $\vec{v}$.

$$\rho(\vec{r},t) = e\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}(t)) \qquad \vec{j}(\vec{r},t) = e\vec{v}\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}(t))$$

Riemann-Sommerfeldovi enačbi za skalarni in vektorski potencial:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\varphi(\vec{r},t) = -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} = -\frac{e}{\varepsilon_0}\delta(x-vt)\delta(z)\delta(y)$$

Tudi skalarni potencial je lahko zgolj funkcija nabora koordinat $(x-vt, y, z)$

Velja: $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Za skalarni potencial dobimo enačbo:

$$\left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(x-vt,y,z) = -\frac{e}{\varepsilon_0}\delta(x-vt)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

Uvedemo nove spremenljivke:

$$X = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ;\ Y = y\ ;\ Z = z;$$

L. transformacija

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right)\varphi(X,Y,Z,t) = -\frac{e}{\varepsilon_0}\delta\left(X\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\delta(Y)\,\delta(Z)$$

Rešitev:

$$\varphi(X,Y,Z,t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\delta\left(X'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\delta(Y')\delta(Z')\,dX'dY'dZ'}{\sqrt{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2}}$$

$$\varphi(X,Y,Z,t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\delta(X')\delta(Y')\,\delta(Z')\,dX'dY'dZ'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2}}$$

V prvotnih spremenljivkah:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}}$$

$X-vt$ je ravno položaj gibajočega se delca, merjen v njegovem lastnem koordinatnem sistemu.

Ekvipotencialne ploskve ima na <u>Heavisideovem elipsoidu</u>:

$$(x-vt)^2 + y^2 + z^2 - \frac{v^2}{c^2}(y^2+z^2) = \text{konst.}$$

$$(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2) = \text{konst.}$$

V lastnem sistemu $(X_0 = x - vt)$

$$X_0^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(Y_0^2 + Z_0^2\right) = R_0^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\Theta\right)$$

Θ - kot med smerjo 2D vektorja (Y_0, Z_0) in X_0.

$R_0^2 = X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2$; $\quad \sin^2\Theta = \frac{Y_0^2 + Z_0^2}{R_0^2}$;

Še za vektorski potencial:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 t^2}\right)\vec{A}(\vec{r},t) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r},t) = -\mu_0 e\vec{v}\,\delta(x-vt)\delta(y)\delta(z)$$

$\vec{v} = (v,0,0) \Rightarrow \vec{A} = (A_x, 0, 0)$

$$\left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_x(x-vt, y, z) =$$

$$= -\frac{ev}{\varepsilon_0}\delta(x-vt)\delta(y)\delta(z)$$

(podobno kot prej):

$$A_x(\vec{r},t) = \frac{v}{c^2}\varphi(\vec{r},t) = \frac{ev}{4\pi c^2 \varepsilon_0 \sqrt{(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}}$$

D

Dopplerjev pojav

$k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$ Velikost valovnega štirivektorja je nič. (*)

$k' = |\vec{k}'| = \frac{\omega'}{c}$ $k_x = k\cos(\theta) \leftarrow$ v S

Iz Lorentzove transformacije:

$$\omega' = \gamma\omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

Dopplerjev pojav obstoja tudi, če se izvor giblje v transverzalni smeri, torej $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\omega' = \gamma\omega = \frac{\omega}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Aberacija

V S': $k_x' = k'\cos(\theta')$

$$k'\cos(\theta') = \gamma\left(k\cos\theta - \frac{v\omega}{c^2}\right) = \cos(\theta')\,\gamma\frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\cos(\theta)\right)$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$$

Za $\theta = \frac{\pi}{2}$ (v gibajočem) ima v mirujočem k. s. valovanje smer

$$\cos\theta' = \frac{v}{c}$$

---

* VALOVNI ŠTIRIVEKTOR

$k_\mu k^\mu = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$ $k^\mu = (\vec{k}, -\frac{\omega}{c})$ $k_\mu = (\vec{k}, \frac{\omega}{c})$

$k_x' = \gamma\left(k_x - \frac{v\omega}{c^2}\right)$

$k_y' = k_y$

$k_z' = k_z$

$\omega' = \gamma(\omega - v k_x)$