Sklopljena nihajna kroga

Uvod

Vaja je namenjena študiju in ilustraciji zelo pogostih pojavov v naravi, ki so posledica sklopitve enakih oscilatorjev. Sklopitev povzroči, da posameznih oscilatorjev ne moremo več obravnavati ločeno, marveč kot en sistem. V takem sistemu ostane število prostostnih stopenj enako vsoti vseh prostostnih stopenj posameznih oscilatorjev. Sistem, ki je sestavljen iz n enostavnih enakih oscilatorjev, ima n lastnih nihanj, ki jih opišemo z lastnimi frekvencami ω_n in lastnimi vektorji. V primeru dveh fizičnih nihal, sklopljenih s povezovalno vzmetjo, že vemo, da ostane ena frekvenca enaka lastni frekvenci enega samega nihala, obe nihali pa takrat nihata v fazi. Druga lastna frekvenca je večja in to tem bolj, čim močnejša je sklopitev. Nihali takrat nihata v nasprotni fazi.

Idealni električni nihajni krog je sestavljen iz kondenzatorja s kapaciteto C, ki ne prevaja električnega toka, in iz tuljave z induktivnostjo L brez ohmskih izgub. Enkrat vzbujen bi tak krog nihal s konstantno amplitudo pri frekvenci ω_0 , ki se izraža kot

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Za podrobnosti izpeljave in razlago glej [1]. V vsakem nihajnem krogu so električni vodniki, ki običajno niso superprevodni. Pri višjih frekvencah tuljave tudi nezanemarljivo sevajo in s tem povzročajo izgube. Zanimamo se za lastno nihanje v nihajnem krogu, ki ima poleg kondenzatorja C in tuljave L zaporedno s tuljavo vezan upornik z uporom R. Kondenzator priključimo na baterijo in jo potem hitro umaknemo. Krog zaniha in tok I v njem ima naslednjo odvisnost

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0' t,$$

kjer je koeficient dušenja $2\beta = R/L$, lastna frekvenca pa se zmanjša zaradi dušenja in znaša

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Tudi napetost na različnih elementih kroga niha sinusno, faze napetosti glede na tok moramo seveda posebej določiti.

Poglejmo si, kaj se zgodi, ko prvemu nihajnemu krogu dodamo še enega, ki je prvemu identično enak. Povežemo ju s kondenzatorjem C_0. Shema vezave je na sliki 1, kjer zaenkrat upoštevamo, da je sistem obeh nihajnih krogov izoliran od okolice, to je upornik $R_g = \infty$. En način nihanja lahko takoj uganemo. Če oba kroga hkrati in enako močno vzbudimo, bosta zanihala v fazi in vmesnega sklopitvenega kondenzatorja sploh ne bosta čutila. Ta način nihanja opišemo enako, kot v primeru enega samega kroga. Drugi lastni nihajni način je po analogiji z mehanskimi nihali tak, da kroga nihata v nasprotni fazi. V tem primeru imata napetosti U_1 in U_2 naslednjo odvisnost

$$U_{1,2} = \pm U_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0'' t,$$

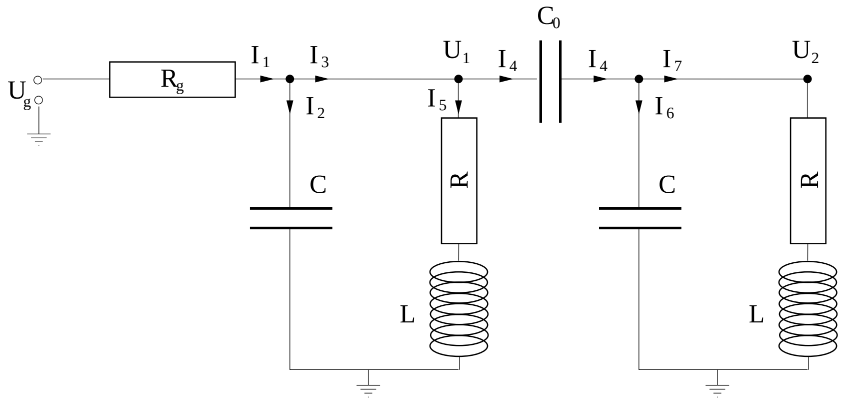
z enakim koeficientom dušenja in z novo lastno frekvenco, ki je dodatno zmanjšana zaradi sklopitve in znaša

$$\omega_0'' = \sqrt{\frac{C}{C + C_0}\omega_0^2 - \beta^2}$$

Kakor že vemo, je v splošnem primeru, kadar krogov ne zanihamo tako lepo simetrično, napetost v posameznem krogu linearna superpozicija obeh lastnih nihanj:

$$U_{1,2} = [U' \cos \omega_0' t \pm U'' \cos(\omega_0'' t + \delta)]\, e^{-\beta t} \tag{1}$$

Konstanti U' in U'' in fazni premik δ so določeni z začetnimi pogoji sistema.



Slika 1: Tokovni izvor napaja s tokom I_1 sklopljena nihajna kroga. V našem primeru je sklopitev med nihajnima krogoma izvedena s kondenzatorjem C_0, ki mu lahko spreminjamo kapaciteto. Drugi podatki: $R = 7.5\ \Omega$, $R_{\mathrm{g}} = 220\ \mathrm{k}\Omega$, $C = 5.6$ nF.

Način vzbujanja s kratkotrajnim priključevanjem baterije seveda ni praktičen. Zanimali se bomo za kontrolirano vzbujanje. Vir znane časovno spremenljive napetosti priključimo na nihajni krog. Način priključka je pomemben. Tukaj obravnavamo le dva skrajna idealizirana primera:

1. Direktni priključek signalnega vira (ki mora imeti notranji upor enak 0) na nihajni krog. Tako dobimo vzbujanje z znano napetostjo.

2. Priključek vira napetosti preko zelo velike (neskončne) impedance. V tem primeru vzbujamo nihajni krog z znanim (točno določenim) tokom.

Analogiji z mehanskim nihalom k primeroma vzbujanja sta vzbujanje z določeno silo in z določenim odmikom. Pri vaji bomo vzbujali z določenim tokom. V ta namen bomo uporabili t.i. tokovni generator, to je signalni izvor z dodanim velikim upornikom, tako da se izvor obnaša kot izvor z veliko notranjo impedanco. Prav z relativno visoko impedanco generatorja glede na komponente nihajnega kroga dosežemo, da se celotni tok skozi nihajni krog le malo spreminja. Shemo vezave kaže slika 1. V prvem delu vaje bomo opazovali nihajne načine nemotenega sistema. V drugem delu pa se bomo zanimali za vsiljeno nihanje.

Potrebščine

- dvokanalni digitalni osciloskop s tiskalnikom
- signalni generator sinusne in pravokotne napetosti
- nihajna kroga in kabli

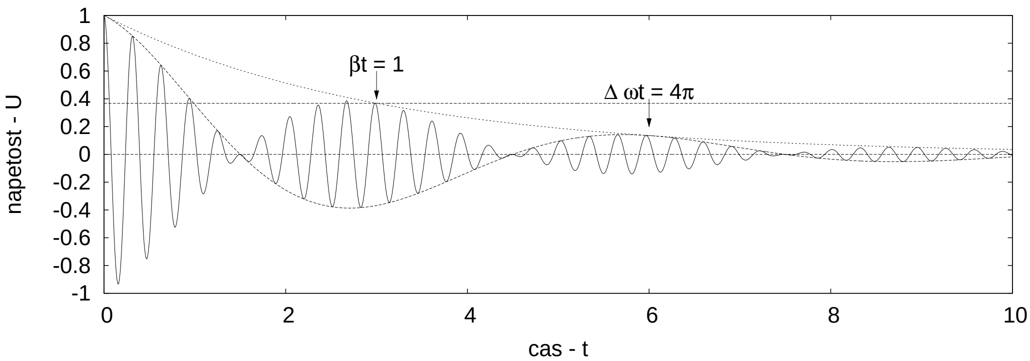
Naloga

1. Izmeri časovni potek napetosti na obeh krogih pri vzbujanju s stopničastim signalom za vse različne sklopitve $C_0[pF] = 0, 150, 330, 560, 820, 1150$.
2. Izmeri frekvenčno karakteristiko enega nihajnega kroga in določi Q.
3. Izmeri frekvenčno karakteristiko sklopljenih nihajnih krogov z meritvijo odziva drugega kroga za vsak C_0 in izmeri razliko lastnih frekvenc $\Delta\omega$.

Navodilo

Signalni (funkcijski) generator priključi na vhod `IN` prvega kroga. Napetost na tem krogu opazuješ na osciloskopu tako, da povežeš izhod `C` na vhod `CH I` osciloskopa. Drugi krog opazuješ na vhodu `CH II` osciloskopa, ki mora biti povezan z izhodom `OUT`. Ozemljitev osciloskopa je izvedena preko tega kabla. Vklopi vse naprave in za začetek nastavi $C_0 =$ 330 pF.

1. Signalnemu generatorju nastavi frekvenco na okoli 400 Hz in ga preklopi v način kvadratnih valov (square wave). Osciloskop nastavi tako, da lahko na zaslonu hkrati opazuješ oba signala. Poišči ustrezno časovno skalo in nastavi proženje. Preizkusi proženje preko `CH I` in `CH II`. Za meritev je primernejše proženje s signalom prvega kroga U_1 ali še bolje z zunanjim (`EXT`) proženjem, za katerega uporabiš isti signal iz funkcijskega generatorja, kakršnega uporabljaš za vzbujanje. Spreminjaj sklopitveni kondenzator in



Slika 2: Utripanje napetosti $U_1 = e^{-\beta t}\cos(\omega t)\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$, kakršno vidimo na prvem nihajnem krogu, po vzbuditvi s stopničastim tokom. Narisani sta še odvisnosti $e^{-\beta t}\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ in $e^{-\beta t}$

opazuj spreminjanje signalov v obeh krogih. Shematično odvisnost napetosti na prvem krogu kaže slika 2 in ustreza funkcijama

$$U_{1,2} = e^{-\beta t}\cos(\omega t)\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$$

ki ju lahko pojasnimo, če v enačbah 1 uganemo, da mora biti $U' = U''$ in fazni premik $\delta = 0$. Tako povežemo $\omega = (\omega_0' + \omega_0'')/2$ in $\Delta\omega = \omega_0' - \omega_0''$. Slike z osciloskopa si izriši s pomočjo tiskalnika. Izmeri najprej lastno frekvenco in dušenje prvega kroga pri $C_0 = 0$. Potem nastavi C_0 na vse vrednosti, ki so na voljo, in pri vsaki izmeri/natisni odvisnosti, ki jih dobiš. Preveri, da ostaja dušenje enako, vsakič pa izmeri frekvenco utripanja $\Delta\omega$.

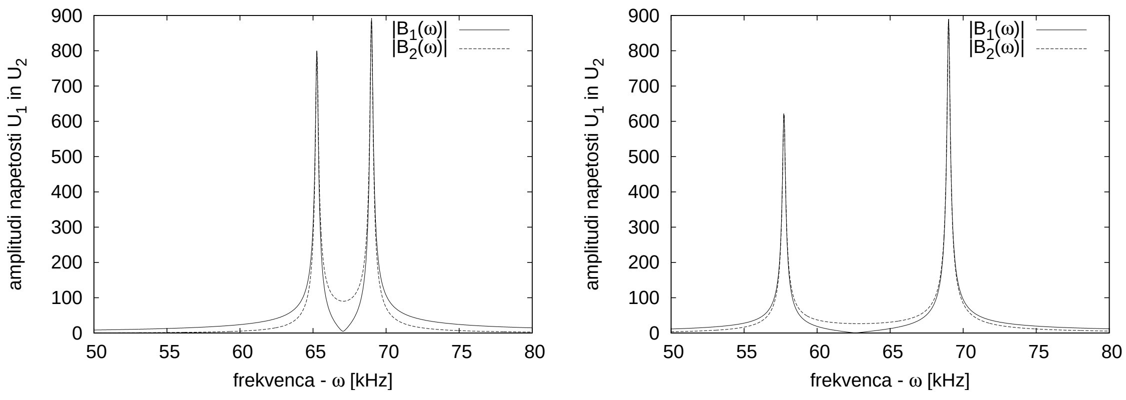
2. Ta del vaje je namenjen študiju vsiljenega nihanja enega nihajnega kroga. Osciloskop naj ostane priključen enako kot prej, funkcijski generator pa preklopi na sinusni izhod in mu nastavi frekvenco na okoli 50 kHz. Sklopitveni kondenzator C_0 naj bo izklopljen, torej $C_0 = 0$. Napetost na krogu $|U_1|$ se najprej linearno veča z naraščajočo frekvenco, ima točno v resonanci ($\omega = \omega_0$) maksimum in nato spet pada. Ostrina resonance je odvisna od dušenja in je tem ožja, čim manj je krog dušen. Širina resonančnega odziva je podana z $\Delta\omega = 2\beta$, če merimo širino resonančne krivulje med točkama, kjer pade napetost na $\sqrt{1/2} = 0.707$ vrednosti maksimuma. Pogosto namesto dušenja (širine resonance) navajamo dobroto (kvaliteto) nihajnega kroga Q, ki se z ostalimi količinami izraža kot

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}$$

in je tem večja , čim manjše je dušenje. Izmeri amplitudo napetosti U_1 kot funkcijo frekvence v okolici resonance. Nariši jo in določi lastno frekvenco in faktor kvalitete Q. (Opaziš lahko, da se vzbuja tudi drugi krog kljub $C_0 = 0$. Kriva je najbrž induktivna sklopitev. Ali jo lahko oceniš?)

3. Pri vklopljenem sklopitvenem kondenzatorju opazuj resonanco. Vidiš jo lahko na obeh krogih. Meri natančno **samo amplitudo** U_2 kot funkcijo frekvence in si v ekstremih te odvisnosti zapiši tudi relativno fazo napetosti U_1 in U_2, ki jo prav tako odčitaš z osciloskopa. Nariši dobljene odvisnosti v en sam graf za vse sklopitve.

Račun, s katerim pojasnimo dobljeno odvisnost, je zamuden in nepregleden in je zato podan posebej v dodatku navodil, kjer sta diskutirana primera šibke in močnejše sklopitev med obema krogoma. Glavni rezultat so frekvenčne odvisnosti amplitude merjenih napetosti U_1 in U_2 prikazani na sliki 3.



(a) (b)

Slika 3: Realistična frekvenčna odvisnost amplitud napetosti U_1 ($= |B_1(\omega)|$) in U_2 ($= |B_1(\omega)|$) za šibko ($C_0 = 330$ pF) (a) in močno ($C_0 = 1200$ pF) (b) sklopitev krogov.

Pri šibki sklopitvi se resonančni odziv prvega kroga skoraj ne spremeni. Na drugem krogu je resonančni odziv ostrejši, saj je njegova oblika podana kar s kvadratom odziva prvega kroga. Seveda pa je napetost na drugem krogu bistveno manjša.

Pri močni sklopitvi se oblika resonančnega odziva obeh krogov precej bolj spremeni. Pojavita se dva vrhova pri frekvencah, ki smo jih prej izračunali. Meja med šibko in močno sklopitvijo je podana s pogojem $Q = (C + C_0)/C_0$. Taki sklopitvi pravimo, da je kritična, in takrat ima frekvenčna karakteristika najširši ravni del. Omenjene lastnosti so pomembne, kadar načrtujemo filtre, ki naj bi prepuščali določen frekvenčni pas. Pri filtrih je pomembna tudi faza signala in kot lahko vidimo iz slik v dodatku, se faza v bližini resonance hitro spreminja. Enakomernost faze lahko izboljšamo, če žrtvujemo nekaj enakomernosti v odzivu amplitude. Na tem mestu smo te probleme le omenili, ne bomo pa se ukvarjali z njimi.

Dodatek: Resonančna dinamika sklopljenih nih. krogov

Privzeli bomo, da vzbujamo sklopljena nihajna kroga s tokovnim izvirom I_1 z odvisnostjo

$$I_1 = I_0 \cos(\omega t), \qquad \text{oz.} \qquad I_1^* = I_0 e^{\mathrm{i}\omega t},$$

kjer je I_0 realna amplituda toka. Za kompleksno notacijo električnih količin bomo uporabili zvezdico (*) nad simbolom. Pri zapisu enačb se bomo sklicevali na simbole/količine notirane na sliki 1. Napišimo enačbe drugega nihajnega kroga

$$I_4 = I_6 + I_7, \quad \dot{e}_2 = I_6, \quad U_2 = e_2/C = RI_7 + L\dot{I}_7,$$

iz česar dobimo njegovo gibalno enačbo:

$$a\ddot{I}_7 + b\dot{I}_7 + I_7 = I_4. \tag{2}$$

Uvedli smo konstante $a = LC$ in $b = RC$. Poglejmo sedaj še prvi nihajni krog. Ohranjanje toka in napetoti nam dasta enačbe

$$I_1 = I_2 + I_5, \quad \dot{e}_1 = I_2, \quad U_2 = e_1/C = RI_5 + L\dot{I}_5,$$

ki določujejo gibalno enačbo drugega kroga:

$$a\ddot{I}_7 + b\dot{I}_7 + I_7 = I_1 - I_4. \tag{3}$$

Povezava med obema krogoma je tok I_4 in je podan z enačbo

$$U_2 - U_1 = e_0/C_0, \qquad \dot{e}_0 = I_4.$$

Z izrazi za U_1 (3) in U_2 (2) slednjo enačbo preoblikujemo v

$$a'\ddot{I}_7 + b'\dot{I}_7 - (a'\ddot{I}_5 + b'\dot{I}_5) = I_4, \tag{4}$$

pri čemer uvedemo konstanti $a' = C_0 L$ in $b' = C_0 R$. Iz glavnih enačb problema (3), (2) in (4) sedaj eliminiramo I_4, ki nam služi za opis sklopitve med obema krogoma in nas v prihodnje ne zanima. Preostali enačbi prepišemo, z uvedbo novih spremenljivk vsote tokov $s = I_5 + I_7$ in njene razlike $d = I_5 - I_7$, v naslednjo obliko

$$a\ddot{s} + b\dot{s} + s = I_1, \qquad (2a' + a)\ddot{d} + (2b' + b)\dot{d} + d = I_1. \tag{5}$$

Torej vidimo, da imamo v sistemu dva lastna načina dinamike tokov in sicer simetrični, označen s spremenljivko s, in antisimetrični, s spremenljivko d. Rešitvi teh dveh enačb sta

$$s^*(t) = A(\omega, a, b)e^{\mathrm{i}\omega t}, \quad d^*(t) = A(\omega, a + 2a', b + 2b')e^{\mathrm{i}\omega t},$$

$$A(\omega, x, y) = \frac{I_0}{1 - \omega^2 x + \mathrm{i}\omega y},$$

kjer smo definirali funkcijo tipičnega resonačnega odziva dušenega nihala $A(\omega, a, b)$ z resonančno frekvenco $\omega_0 = a^{-\frac{1}{2}}$ in dušenjem $2\beta = b/a$. Iz zgornjega izraza lahko razberemo, da imata simetrični in asimetrični način različni resonančni frekvenci za neničelno moč sklopitve $b \propto C_0 \neq 0$. Z uporabo rešitev za lastna načina dinamike $s^*(t)$ in $d^*(t)$ lahko izrazimo iskani in merjeni napetosti U_1 in U_2 kot

$$U_1^* = (R + \mathrm{i}\omega L)(s^* + d^*) = B_1(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}, \qquad U_2^* = (R + \mathrm{i}\omega L)(s^* - d^*) = B_2(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t},$$

pri čemer sta B_1 in B_2 kompleksni amplitudi napetosti podani s formulama

$$B_1 = \frac{I_0}{2}(R + \mathrm{i}\omega L)\left(A(\omega, a, b) + A(\omega, a + 2a', b + 2b')\right) ,$$
$$B_2 = \frac{I_0}{2}(R + \mathrm{i}\omega L)\left(A(\omega, a, b) - A(\omega, a + 2a', b + 2b')\right) .$$

Tipična frekvenčna odvisnost izrazov B_1 in B_2 je narisana na sliki 3.

Literatura

[1] J. Strnad, *Fizika 2. del - Elektrika in optika*, (DMFA, Ljubjana, 1995) str. 385-390