

## 1 Jedro

### 1.1 Masa jedra; semiempirična masna enačba

1. *Stabilna jedra z semiempirično masno enačbo*

Z semiempirično masno enačbo določi  $Z(A)$  (število protonov  $Z$  v odvisnosti od vrstnega števila  $A$ ) za stabilna sodo-liha jedra. Primerjaj zvezo z stabilnimi jedri v naravi. Vrednosti konstant  $w_i$  so podane v Strnadovi knjigi IV.

2. *Jedro v približku Fermijevega plina*

Določi vezavno energijo jedra z  $Z$  protoni in  $N$  nevtroni v približku Fermijevega plina. Predpostavi  $r_j = r_1 A^{1/3}$  kjer  $r_1 = 1.1$  fm. Določi konstanti  $w_0$  in  $w_3$  v tem preprostem modelu.

Pri tem predpostavi, da vsak nukleon čuti v povprečju potencialno energijo  $\bar{W}_p^{nukleon} = -25$  MeV zaradi močne interakcije z sosedi; ta potencialna energija je že povprečena po različnih orientacijah spina ter po prispevkih  $pp$ ,  $pn$  ter  $nn$  (skripta Rosina, poglavje 3.1.3).

### 1.2 Fermijevo zlato pravilo; gostota prostih stanj

1. Primer uporabe Fermijevega zlatega pravila: ionizacija vodikovega atoma

Vodikov atom v osnovnem stanju je v električnem polju  $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t)$  in zaradi tega pride do ionizacije.

a) Kakšen je valovni vektor  $|\vec{k}|$  elektrona po ionizaciji?

b) Določi verjetnost na enoto časa  $W_{fi} = P_{fi}/t$  za prehod elektrona iz osnovnega stanja v končno stanje z valovnim vektorjem  $\vec{k}$ , ki je pod kotom  $[\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta_0]$  glede na električno polje  $\vec{E}_0$ .

c) Kolikšna pa je verjetnost za ionizacijo na enoto časa, sešeta po vseh smereh končnega valovnega vektorja  $\vec{k}$ ?

2. Koliko je stanj v neskončni 3D potencialni jami z stranicami  $L$ , ki imajo gibalno količino med  $p_1$  in  $p_2 = p_1 + \Delta p$  ( $p \equiv |\vec{p}|$ )? Izpeljava  $d^6n = d^3p d^3r/h^3$

[Strnad IV, str 38-40]

### 1.3 Sipanje elektronov na jedru; polmer jedra; oblikovni faktor porazdelitve naboja

1. Curek elektronov z energijo  $E = 450$  MeV vpada na jedro niklja ( ${}_{28}^{58}\text{Ni}$ ) in se na njem elastično siplje. Predpostavi, da je naboj protonov enakomerno porazdeljen po jedru niklja, polmer jedra pa je  $R \simeq r_0 A^{1/3}$  z  $r_0 \simeq 1.1$  fm.

a) Pri katerem sipalnem kotu  $\theta$  ima diferencialni sipalni presek  $d\sigma/d\Omega$  prvi minimum? (Z merjenjem tega kota so v praksi določili  $R$ )

b) Določi diferencialni sipalni presek  $d\sigma/d\Omega$ .

c) Curek elektronov  $E = 450$  MeV ima gostoto vpadnega toka  $j_i$  in površino  $S$ , vpada pa na tanek listič niklja z debelino  $x$  in gostoto  $\rho_{Ni}$  (površina lističa je večja od površine curka). Določi koliko sipanih elektronov ( $\Delta N_{sip}$ ) zazna detektor v času  $t$ , če detektor pokriva prostorski kot med  $[\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta_0]$ .

## 1.4 Lupinski model jedra; vrtilna količina, parnost in dipolni magnetni moment jedra

1. Enodelčna stanja jedra obravnavajmo, kot da nukleoni čutijo povprečen potencial harmonske oblike (v 3D), poleg tega pa upoštevajmo sklopitev spin-tir.

$$\hat{H} = \hat{T} + V(r) + H_{ls}, \quad V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m_N\omega^2r^2, \quad \hat{H}_{ls} = -2\eta\hat{l} \cdot \hat{s}$$

a) Najprej zanemarimo sklopitev spin-tir. Zapiši energije prvih nekaj stanj in število eno-protonskih (eno-nevtronskih) stanj na vsakem energijskem nivoju. Napovej nekaj prvih "magičnih" števil v tem modelu.

b) Zdaj upoštevajmo tudi sklopitev spin-tir. DN: Določi energije in število eno-protonskih (eno-nevtronskih) stanj za nekaj najnižjih nivojev.

c) Iz energijskega spektra razberemo, da je energijska razlika med enonukleonskima stanjema  $1d_{3/2}$  in  $1d_{5/2}$  enaka  $\Delta W_a = W_{1d_{3/2}} - W_{1d_{5/2}} = 1.5$  MeV. Energijska razlika med enonukleonskima stanjema  $1f_{5/2}$  in  $2s_{1/2}$  pa je enaka  $\Delta W_b = W_{1f_{5/2}} - W_{2s_{1/2}} = 5$  MeV.

Določi parametra  $\eta$  in  $\omega$  tega lupinskega modela.

DN: Oцени tudi  $V_0$  ob predpostavki da  $V(R_j) = 0$  in  $R_j = r_1 A^{1/3}$ .

2. Določi magnetni dipolni moment devterona.

Devteron je sestavljen iz protona in nevtrona, ima celotno vrtilno količino  $J = 1$  in pozitivno parnost. Pravzaprav je linearna kombinacija dominantnega prispevka  $|J = 1, S = 1, L = 0\rangle$  in majhnega deleža  $|J = 1, S = 1, L = 2\rangle$ , kjer  $J, S$  in  $L$  označujejo celotno vrtilno količino, spin, in orbitalno vrtilno količino devterona.

a) Določi magnetni moment za primer, če bi bil devteron v celoti  $|J = 1, S = 1, L = 0\rangle$

b) Določi še magnetni moment za primer, če bi bil devteron v celoti  $|J = 1, S = 1, L = 2\rangle$ . Pri tem sta proton in nevtron v eno-delčenih stanjih z  $l^p = 1$  in  $l^n = 1$ .

Primerjaj to z izmerjenim magnetnim momentom  $\mu^{exp} = 0.857 \mu_N$ .

3. Za jedri  ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$  in  ${}^{93}_{41}\text{Nb}_{52}$  določi v okviru lupinskega modela

- protonsko in nevtronsko konfiguracijo

-  $j, l, s$ , parnost  $P$

- dipolni magnetni moment

[skripta Golob Kamenik, poglavji 1.8, 1.9]

## 1.5 Razpad $\alpha$

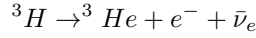
[Strnad IV, str 176-181; skripta Golob Kamenik, poglavja 1.3-1.5]

1. Določi razpadni čas za  ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + \alpha$  pri čemer integral v eksponentu izvednoti točno.
2. DN: Nariši graf  $\text{Log}_{10}[t_{1/2}]$  v odvisnosti od  $1/\sqrt{T_\alpha}$  za izotope  ${}_{84}\text{Po}$  in  ${}_{69}\text{Tm}$ . Dobljen graf primerjaj z izmerjenimi vrednostmi na sliki 1.2 v skripti Golob Kamenik. Pri izračunu integrala v eksponentu zdaj uporabi isti približek kot je v Strnadu IV.

## 1.6 Razpad $\beta$

[gradiva *beta-razpad.pdf*, skripta Studen, str. 11 in 51]

1. Najnatančnejše meritve za maso  $\nu_e$  so bile v preteklih letih dobljene pri opazovanju  $\beta$ -razpada tritija:



in trenutna zgornja meja je  $m_{\nu_e}c^2 < 2$  MeV. Masi atomov sta  $m_{at}[{}^3\text{H}] = 3.0160492 uc^2$  in  $m_{at}[{}^3\text{He}] = 3.0160293 uc^2$ , kjer  $uc^2 = 931$  MeV. Ta razpad je ugoden, saj je  $Q = T_e^{max}(m_{\nu_e} = 0) = (m_j[{}^3\text{H}] - m_j[{}^3\text{He}] - m_e c^2)c^2 = 18.6$  keV majhen, zato je relativen učinek na meritve kinetične energije elektronov  $T_e$  lažje opazljiv.

- Določi verjetnost za dan  $\beta$  razpad pri čemer upoštevaj da  $m_{\nu} \neq 0$ . Najprej določi verjetnost rapada na časovno enoto  $dW_{fi}$  za primer ko ima elektron gibalno količino na intervalu  $[p_e, p_e + dp_e]$ . Elektro-magnetno interakcijo med  $e^-$  in končnim jedrom zanemari. Matričnega elementa med obema stanjema jeder  $M_{fi} \equiv \int \psi_f^* \psi_i d^3r$  ne bomo izračunali, zato ga lahko pušiš kot prost parameter.
- Nariši Fermi-Kurie-jeva diagrama za

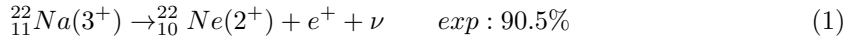
$$\sqrt{\frac{dW_{fi}/dp_e}{p_e^2}}$$

v odvisnosti od  $E_e$  (oziroma raje  $T_e$ ) za dva primera :  $m_{\nu_e}c^2 = 20$  eV in  $m_{\nu_e}c^2 = 2$  eV.

- Določi celoten  $W_{fi}/|M_{fi}|^2$  za prejšnji razpad, kjer vpliv  $m_{\nu}$  seveda lahko zanemariš. Določi  $M_{fi}$  iz podatka, da je izmerjeni razpolovni čas za razpad  $t_{1/2} = 12.3$  let.
2. Določi  $W_{fi}/|M_{fi}|^2$  za zajetje elektrona v atomu  $(Z, A)$ . Tu je  $M_{fi}$  neznan matrični element med začetnim jedrom  $(Z, A)$  in končnim jedrom  $(Z - 1, A)$ .

Isti matrični element  $M_{fi}$  nastopa pri  $\beta^+$  razpadu  $(Z, A) \rightarrow (Z - 1, A) + e^+ + \nu_e$ . Zato lahko določiš razmerje  $W_{fi}(\text{zajetje } e^-)/W_{fi}(\text{razpad } \beta^+)$  za dan prehod  $(Z, A) \rightarrow (Z - 1, A)$ , kjer se neznan matrični element pokrajša.

Konkretno obravnavaj primerjaj zajetje elektrona in  $\beta^+$  razpad pri prehodu  ${}^{22}_{11}\text{Na}(3^+) \rightarrow {}^{22}_{10}\text{Ne}(2^+)$

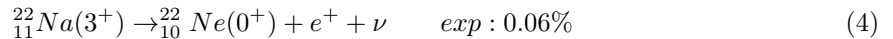
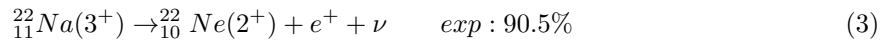


Podatki:  $M_{at}[{}^{22}_{11}\text{Na}(3^+)] = 21.994436 u$ ,  $M_{at}[{}^{22}_{11}\text{Ne}(0^+)] = 21.9911386 u$ ,  $M_j[{}^{22}_{11}\text{Ne}(2^+)] = M_j[{}^{22}_{11}\text{Ne}(0^+)] + 1.275$  MeV, osnovno stanje jedra neona je  ${}^{22}_{11}\text{Ne}(0^+)$ .

Določi razmerje  $W_{fi}(\text{zajetje } e^-)/W_{fi}(\text{razpad } \beta^+)$  in jih primerjaj z izmerjeno vrednostjo.

[skripta Andreja Studna, stran 12]

3. Za  $\beta^+$  razpada



(5)

določi

- kateri  $l$  (skupna tirna vrtilna količina  $e^+$  in  $\nu$ ) bo dominantno prispeval v razpadu
- določi tip dominantno prehoda (Gamow-Teller ali Fermi)
- oceni razmerje verjetnosti pri čemer velikost  $k = |\vec{k}_e + \vec{k}_\nu|$  določiš iz kinematike in podatkov pri prejšnji nalogi ( $\vec{k}$  je porazdeljen na določenem intervalu pri tih dveh dvo-delčnih razpadih, zato oceni le tipično velikost  $k$ )

## 1.7 Razpad $\gamma$

- Z Fermijevim zlatim pravilom izpelji razpadni čas  $\tau$  za jadrski razpad  $\gamma$  ( $X_i \rightarrow X_f \gamma$ ), pri čemer obravnavaj dva primera
  - električni dipolni prehod
  - magnetni dipolni prehod
- Iz izrazov, ki si jih dobil pri prejšnji nalogi, preglej na katerem mestu je bil narejen multipolni razvoj. Oцени koliko so višji električni multipoli  $EL$  potisnjeni glede na vodilni dipolni prehod  $E1$ . Oцени tudi koliko so višji magnetni multipoli  $ML$  potisnjeni glede na vodilni dipolni prehod  $M1$ .
- Jedro neptunija  ${}_{93}^{237}\text{Ne}$  ima naslednja stanja:
  - osnovno stanje 0 z  $J^P = (7/2)^+$
  - prvo vzbujeno stanje 1 z  $J^P = (5/2)^+$  in  $E_{01} \equiv E_1 - E_0 = 33 \text{ keV}$
  - drugo vzbujeno stanje 2 z  $J^P = (5/2)^-$  in  $E_{02} \equiv E_2 - E_0 = 59.5 \text{ keV}$
  - Oцени  $R = w[5/2^- \rightarrow 5/2^+]/w[5/2^- \rightarrow 7/2^+]$  za razpade s sevanjem  $\gamma$ . Izmerjeno razmerje je  $R^{exp} \simeq 15$ . Kaj lahko iz tega bolj podrobno določiš?
  - Določi  $(p_e)_{fi}/e_0 = R_{fi} = |\int \psi_f^* \sum_p \vec{r} \psi_i|$  za prehod  $2 \rightarrow 0$  iz izmerjenih podatkov. Razpadni čas stanja  $(5/2)^-$  je  $\tau_2 = 67 \text{ ns}$ . Izmerjeno razmerje med ostalimi razpadnimi kanali in danim razpadom gamma je  $w_2^{ostali}/w_{2 \rightarrow 0}^\gamma \equiv \alpha_T(2 \rightarrow 0) = 1.16$ .
  - Določi razpadni čas  $\tau_1$  stanja  $(5/2)^+$ . Za oceno magnetnega dipolnega momenta vzami kar povprečje magnetnega dipolnega momenta v končnem in začetnem stanju. Izmerjeno razmerje med ostalimi razpadnimi kanali in danim razpadom  $\gamma$  je  $w_1^{ostali}/w_{1 \rightarrow 0}^\gamma \equiv \alpha_T(1 \rightarrow 0) = 175$ .

[skripta Andreja Studna, stran 12-14]

- Določi kateri prehodi ( $EL$ ,  $ML$ ,  $L = ?$ ) bodo vodilni pri naslednjih razpadih:
  - $X[2^+] \rightarrow X[4^-] \gamma$
  - $X[9/2^-] \rightarrow X[3/2^+] \gamma$

## 2 Osnovni delci

### 2.1 Klein-Gordon-ova enačba, sipanje, Breit-Wignerjeva resonanca

[literatura za analogno ne-relativistično sipanje: skripta Golob Kamenik 2.1; Landau-Lifšic: Kvantna mehanika, poglavje 122; Schwabl, poglavji 17 in 18]

Klein-Gordonova enačba je kvantno-mehanska enačba

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0,$$

ki opisuje valovno funkcijo  $\psi(\vec{x}, t)$  za relativističen delec je brez sipna. Med osnovnimi delci v Standardnem modelu brez spina le Higgsov bozon, ostali osnovni delci pa imajo spin  $1/2$  and  $1$ . V fiziki delcev pa obstaja kar nekaj sestavljenih delcev z sipnom  $S = 0$ , med njimi je verjetno najpomembnejši pion  $\pi$ . Mezoni so sestavljeni iz valenčnega kvarka in antikvarka in imajo na splošno celo-številčen spin, med njimi pa je kar precej takih z sipno nič.

- Zapiši valovno funkcijo  $\psi(\vec{x}, t)$  za  $\pi$  z maso  $m_\pi c^2 = 140 \text{ MeV}$  in gibalno količino  $pc = 300 \text{ MeV}$ . Očitno ne-relativistična Schrodingerjeva enačba ne drži za tako velike gibalne količine, zato uporabi Klein-Gordonovo enačbo.

2. Pion z gibalno količino  $p$  se siplje na mirujočem nukleonu. V sipalnem kanalu, ki nas zanima, je interakcija med pionom in nukleonom privlačna. V osnovni teoriji interakcijo (v tem primeru med  $N$  in  $\pi$ ) prenašajo nosilci sil. V našem poenostavljenem primeru pa bomo interakcijo med  $N$  in  $\pi$  opisali kar z potencialom  $V(\vec{x})$ . Obravnavajmo enostaven približek končne škatle v 3D, kjer je potencial  $V(r < r_0) = -V_0$  in  $V(r > r_0) = 0$ . Določi valovni funkciji znotraj in zunaj škatle za primer ko ni kotne odvisnosti ( $l = 0$ ). Funkcijo zunaj izrazi v obliki  $\psi(r, t) \propto e^{-iEt/\hbar} \sin(\frac{p}{\hbar}r + \delta)$  in določi fazni premik  $\delta$  za dan  $V_0$  in  $r_0$ . Iz faznega premika  $\delta$  bomo v naslednjem problemu izračunali presek za sipanje  $\sigma$  in diferencialni presek  $d\sigma/d\Omega$ .

Pri tem primeru smo fazni premik  $\delta = \delta_{l=0}$  definirali iz valovne funkcije kot  $e^{2i\delta} \equiv -\frac{\text{koeficient pred } e^{ikr}}{\text{koeficient pred } e^{-ikr}}$ .

3. Raven val  $\psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{ikz}$  vpade na potencial  $V(r)$  poljubne oblike, ki ima končen doseg  $r_m$ , torej  $V(r > r_m) = 0$ .

- (a) Zapiši  $\psi_{cel} = \psi_i + \psi_f$  za  $r \gg 1/k$  po parcialnih valovih ( $i$  označuje vpadni val,  $f$  pa sipani val). Uvedi fazni premik  $\delta_l$  pri parcialnem valu  $l$  iz celotne valovne funkcije  $\psi_{cel}$  kot

$$S_l \equiv e^{2i\delta_l} \equiv -(-1)^l \frac{\text{koeficient pred } e^{ikr}}{\text{koeficient pred } e^{-ikr}}$$

kjer je  $S_l$  tokrat  $S$ -matrika za  $l$ -ti parcialni val. Ta definicija je skladna z definicijo za  $\delta_{l=0}$  pri prejšnjem primeru.

- (b) Določi  $j_i$  za vpadni  $\psi_i$  val in  $j_f$  za sipani vaj  $\psi_f$  pri določenem  $\theta$ .  
 (c) Določi diferencialni in totalni sipalni presek in ga izrazi z  $\delta_l(k)$ .  
 (d) Razmisli pri katerem  $\delta_l$  določen parcialni val doseže najmočnejše sipanje oziroma najšibkejšo sipanje.

4. Breit-Wignerjeva odvisnost preseka od energije za sipanje pri katerem se tvori resonanca

Zvezo za presek  $\sigma$  v odvisnosti od  $\delta$ , ki si jo dobil pri prejšnji nalogi, razvij do prvega reda okoli energje  $E_R$  kjer je presek največji. Dobil boš Breit-Wignerjevo odvisnost preseka od energije za sipanje pri katerem se tvori resonanca.

[skripta Golob Kamenik, str 27-29]

### 5. Yukawa potencial:

Nevtron z gibalno količino  $p_n$  se elastično siplje na mirujočem jedru. Nosilec močne interakcije med jedrom in nevtronom je pion  $\pi^0$ . Določi razmerje  $N_1/N_2$  števila nevtronov na dveh detektorjih, ki se nahajata pri kotih  $\theta_1$  oziroma  $\theta_2$  glede na vpadi curek, na razdaljah  $r_1$  oziroma  $r_2$ , ter imata površini  $S_1$  in  $S_2$ .

## 2.2 Simetrije in ohranitveni zakoni

1. Zapiši valovni funkciji za dve stanji  $pn$ , za kateri pričakuješ, da imata najnižjo energjo (odvisnosti od  $r$  ni potrebno določiti). Določi katero od njiju ustreza devteronu iz podatka, da je eksperimentalno izmerjena vrtilna količina devterona  $J = 1$ .

2. Določi razmerje

$$\frac{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}{K^{*+} \rightarrow \pi^+ K^0}$$

3. Prvi vzbujeni barion z  $I = 0$  je  $\Lambda(1405)$  in razpada po močni interakciji  $\Lambda(1405) \rightarrow \Sigma\pi$ . V katere kombinacije  $\Sigma\pi$  razade in kolikšna so razmerja verjetnosti za te kombinacije? Nariši tudi diagrame razpada na kvarkovskem nivoju.

4. Za naslednje Hamiltoniane

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \quad H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{A}{r^3} \quad H_3 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{B}{z^4} \quad H_4 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + C \hat{L}\hat{S}$$

navedi ali se s časom ohranja pričakovana vrednost naslednjih operatorjev (za različne opazljivke  $\hat{x}$ )

- $P_x, P_y, P_z$
- $L_x, L_y, L_z, L^2$
- $S_x, S_y, S_z, S^2$
- $J_x, J_y, J_z, J^2$

Operatorje  $\hat{L}_i$  izrazi z vrteži za majhne roatcije  $R_i$  v prvem redu. Ali navedeni operatorji  $\hat{x}$  komutirajo s  $H_i$ ? Vemo, da velja

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{x}]$$

Če torej operatorji komutirajo s Hamiltonianom, se ustrezne opazljivke s časom ohranjajo. Če operatorji ne komutirajo pa so opazljivke časovno odvisne. Primer: če  $[\hat{P}_y, H_i] = 0$  se  $P_y$  ohranja.

5. Zelo poenostavljen (toy-model) Hamiltonian za kvarka  $u$  in  $d$  pri močni interakciji je lahko kar

$$H_{strong} = (T + m_u)a_u a_u^+ + (T + m_d)a_d a_d^+ + g_s(a_G^+ a_u a_u^+ + a_G^+ a_d a_d^+)$$

kjer so  $a^+$  in  $a$  kreacijski in annihilacijski operatorji,  $T$  je kinetična energija ustvarjenih kvarkov, zadnji člen pa predstavlja interakcijo  $u$  oziroma  $d$  z gluonom. Slednja ni odvisna od okusa kvarka, edina odvisnost od okusa kvarka izhaja iz mase  $m_q$ .

Določiti  $[I_1, H_{strong}]$  in ali se  $I_1$  s časom ohranja za

- $m_u \neq m_d$
- $m_u = m_d$

Kaj pa  $[I_3, H_{strong}]$  in ohranitev  $I_3$ ?

6. Zdaj dodamo močni interakciji iz prejšnje naloge še elektromagnetno v poenostavljenem modelu

$$\hat{H} = H_{strong} + \hat{H}_{EM}, \quad \hat{H}_{EM} \propto e_u a_\gamma^+ a_u a_u^+ + e_d a_\gamma^+ a_d a_d^+$$

kjer  $e_u = 2e_0/3$ ,  $e_d = -e_0/3$  in  $a_\gamma^+$  kreira foton. Ali celoten  $\hat{H}$  komutira z izospinskim operatorjem  $I_1$ ? Ali zdaj tudi pričakujemo, da bodo energije stanj dobljene preko  $I_\pm$  enake?

7. Analogen poenostavljen Hamiltonian za vse kvarke bi bil

$$H_{strong} = \sum_{q=u,d,s,c,b,t} (T + m_q)a_q a_q^+ + g_s a_G^+ a_q a_q^+$$

Definirajmo posplošeni operator izospina  $\tilde{I}_i$ , ki deluje na prostoru  $(u, b)$  namesto  $(u, d)$ . Ali se  $\tilde{I}_1$  s časom ohranja, če vemo da je  $m_b \gg m_u$ ?

8. Zakaj smo razširili Fermijevo izključitveno načelo še na izospinsko prostostno stopnjo? Pri prvi nalogi (o stanjih  $pn$ ) navsezadnje  $p$  in  $n$  nista identična delca.

Vemo, da za stanje dveh identičnih  $pp$  originalno Fermijevo izključitveno načelo zahteva  $\psi_{spin,space} = \psi_{spin,space}^A$ ; torej pri  $L = 0$  zahteva  $\psi_{spin}^A$  (A=antisimetrično). Podobno za  $nn$  tudi  $\psi_{spin}^A$ . Pri nalogi 5 smo ugotovili da močna interakcija ohranja  $I_i$  v približku  $m_u = m_d$ . Zato morajo biti observable za stanje  $|pn\rangle_{I=1} = I_-|p\rangle_1|p\rangle_2$  enake kot za  $|p\rangle_1|p\rangle_2$ . Zapiši dobljeno valovno funkcijo za  $|pn\rangle_{I=1}$ . Invariantnost  $H_{strong}$  na izospinske transformacije torej zahteva da mora biti imeti tudi stanje  $|pn\rangle_{I=1}$  spinski del antisimetričen. Od tod lahko posplošimo valovno funkcijo na  $\psi_{cel} = \psi_I \psi_{spin,space}$ , posplošeno Fermijevo pravilo pa pravi, da je ta antisimetrična na zamenjavo delcev.

9. So spodnji procesi dovoljeni v Standardnem Modelu? Če so dovoljeni - po kateri interakciji potekajo?

- a)  $\nu n \rightarrow p\mu^-$
- b)  $K^- p \rightarrow \Lambda\pi^0$
- c)  $K^+ n \rightarrow \Sigma^+\pi^0$

[skripta Golob Kamenik, str 38]

### 2.3 Kvarkovski model hadronov

1. Zapiši valovno funkcijo bariona  $\Sigma^-$  ki ima okusno strukturo  $dds$ ,  $J^P = 1/2^+$ ,  $J_z = 1/2$  in  $L = 0$ . Preveri ali je končna valovna funkcija antisimetrična na vse tri zamenjave  $1 \leftrightarrow 2$ ,  $2 \leftrightarrow 3$ ,  $3 \leftrightarrow 1$ .

a) Določi magnetni moment  $\mu_\Sigma$ . Primerjaj izračunan in izmerjen  $\mu_{\Sigma^-}/\mu_p$ , kjer  $\mu_{\Sigma^-}^{exp} = -1.16 \mu_N$ . Privzemi  $m_u = m_d$  in  $m_s - m_d \simeq m_\Sigma - m_n$  ter  $m_d \simeq m_p/3$ .

### 2.4 Diracova enačba za prost fermion

1. Zapiši valovno funkcijo elektrona z  $\vec{p} = p\vec{e}_z$  in  $p = 2 \text{ MeV}$ , ki ima spin v negativni smeri osi  $z$ ,  $s_z = -1/2$ .

Določi:  $\hat{S}_z\psi$ ,  $\hat{S}_x\psi$ ,  $\hat{h}\psi$ ,  $j^0 = \rho$ ,  $j_x$ ,  $j_z$

Oprator spina je  $\vec{S} = \frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2}diag(\vec{\sigma}, \vec{\sigma})$ , operator sučnosti je  $\hat{h} = \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|$ , četverec toka je  $\vec{j}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  ki zadošča kontinuitetni relaciji  $\partial_\mu j^\mu = 0$ .

Kateri izmed the operatorjev komutirajo z Hamiltonianom? Za katere količine je  $\psi$  lastno stanje? Določi tudi lastne ustrezne lastne vrednosti.

Osnova: Rešitve Diracove enačbe za prost elektron z  $E > 0$  so  $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}Ne^{-i(Et-\vec{p}\vec{x})}u^{(s)}(p)$  kjer  $u^{(s)}(p) = (\chi^{(s)}, \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)})^T$ ,  $N = \sqrt{E+m}$ ,  $\chi^{(1)} = (1, 0)^T$  in  $\chi^{(2)} = (0, 1)^T$ .

2. Zapiši valovno funkcijo elektrona z  $\vec{p} = p\vec{e}_x$  in  $p = 2 \text{ MeV}$ , ki ima  $h = +1$ . Preveri dobljen  $\hat{\psi}$ .

3. Dokaži polnostno relacijo  $\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + mI$

4. Zapiši valovno funkcijo pozitrona z gibalno količino  $\vec{p} = p\vec{e}_z$  ( $p = 2 \text{ MeV}$ ) ter spinom pozitrona  $s_z = -1/2$ . Pozitrona ima seveda pozitivno energijo  $E = \sqrt{p^2 + m^2} > 0$ .

Valovno funkcijo za pozitron s pozitivno energijo  $E > 0$  dobimo iz valovne funkcije za elektron z  $(-E, -\vec{p})$ :  $\psi_{e^+}(E, \vec{p}) = \psi_{e^-}(-E, -\vec{p})$ , kjer elektron z  $E < 0$  opisuje  $u^{(s+2)}(p) = (-\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)}, \chi^{(s)})^T$ . Torej  $\psi_{e^+}(E, \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{V}}Ne^{-i((-E)t-(-\vec{p})\vec{x})}u^{(s+2)}(-p)$ . Pri tem  $\chi^{(s=1)}$  uporabimo za pozitron z  $s_z = -1/2$  in  $\chi^{(s=2)}$  za pozitron z  $s_z = 1/2$ .

Določi normalizacijsko konstantno  $N$  tako da bo  $\rho = 2E/V$  kjer je  $E > 0$  energija pozitrona. Odg:  $N = \sqrt{|E| + m}$ .

5. Dokaži polnostno relacijo  $\sum_{s=1,2} u^{(s+2)}(-p)\bar{u}^{(s+2)}(-p) = \not{p} - mI$

### 2.5 Diracova enačba in elektromagnetno polje

1. Iz Maxwellovih enačb za  $\vec{E}$  in  $\vec{B}$  izpelji njihovo kovariantno obliko  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu$ .

2. Kako se preko umeritvene transformacije  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu\chi$  transformirajo  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ . Zapiši Maxwellovo enačbo iz prejšnje naloge v Lorenzovi umeritvi  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

3. Diracova enačba v prisotnosti EM polja:

Pokaži, da je Diracova enačba  $[i\gamma^\mu D_\mu - m]\psi = 0$  z  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  ( $e = -e_0 < 0$  za elektron) invariantna na umeritveno transformacijo  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\theta(x)$  in  $\psi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)}\psi(x)$ .

4. Iz Lagrangiana  $L = \frac{1}{2}mv^2 - qA_0 + q\vec{v} \cdot \vec{A}$  za nabit delec v polju  $\vec{E}$  in  $\vec{B}$  pokaži da iz njega preko Euler-Lagrangevih enačb sledi Lorentzova sila  $\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$ . Tu je  $q$  naboj delca, torej za elektron  $q = -e_0$ .

Iz Lagrangiana izpelji Hamiltonian  $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qA_0$ , kjer je  $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$  kanonični impulz. Nadomestitev  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}$  je analogna nadomestitvi  $i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - qA^\mu$  oziroma  $\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + iqA^\mu = D^\mu$ . Ta je za elektron  $D_\mu = \partial_\mu - ie_0A_\mu$  enaka kot pri Diracovi enačbi z EM poljem.

## 2.6 Elektromagnetno sipanje delcev z spinom 1/2

1. Pri Fermijevem zlitem pravilu nastopa v matričnem elementu potencial  $V$ . Razmislimo kako določiti  $V$  za primer Diracove enačbe ki opisuje interakcijo fermionov z EM poljem. Kako  $A^\mu$  nastopa v Diracovi enačbi smo se naučili že v prejšnjem poglavju.

a) Pri časovno neodvisni Schrodingerjevi enači za prost delec  $V$  uvedemo tako da  $E$  nadomestimo z  $E \rightarrow E - V$ .

b) Uporabi enak postopek pri Diracovi enačbi in na koncu zapiši tudi časovno odvisno Diracovo enačbo, ki vključuje potencial.

Enak rezultat dobiš če  $H = \vec{\alpha} \cdot p + \beta m$  dodaš  $V$ . Od tod zopet lahko prideš do prej dobljene Diracove enačbe z  $V$ .

c) DN: Uvedi  $V$  na analogen način še v Klein Gordonovo enačbo in zapiši časovno odvisno obliko.

2. Določi  $d\sigma/d\Omega$  in  $\sigma$  za sipanje  $e^-(p_A)e^+(p_B) \rightarrow e^-(p_C)e^+(p_D)$  v težiščnem sistemu, kjer je gibalna količina  $p_i = |\vec{p}_A| \ll m_Z$  (tako da je izmenjava  $Z$  bozona zanemarljiva). Obravnavaj primer ko sta  $e^+$  in  $e^-$  curka nepolarizirana, spinov  $c$  kvarkov pa tudi ne merimo. Obravnavaj neposredno ta primer, tako da v tokovih uporabiš valovne funkcije za delce  $\psi(p)$  in antidelce  $\psi(-p)$ . Dobljen rezultat primerjaj z rezultatom ki si ga dobil s križanjem iz  $e^-c \rightarrow e^-c$  (oziroma  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ ) pri predavanjih.

a)  $p_i = 6$  GeV: v tem primeru  $m_c$  ni zanemarljiv,  $m_e$  pa je zanemarljiv.

b)  $p_i = 20$  GeV: v tem primeru pa  $m_c$  zanemari.

## 2.7 Procesi preko šibke interakcije

1. Matrični elementi za procese, ki potekajo preko izmenjave  $W$  bozonov, so pri nizkih energijah  $q^2 \ll m_W^2$  enaki  $M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_W^\mu [1] j_{W\mu} [2]$ . Za prehod prostega fermiona je  $j_W^\mu = \bar{u}(p)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p')$ .

2. Šibki procesi preko izmenjave bozono  $W$  delujejo med levo-ročnimi fermioni  $\psi_L(x) \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi(x)$ . Pokaži, da velja zveza

$$\bar{u}_L(p)\gamma^\mu u_L(k) = \bar{u}(p)\gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u(k)$$

3. Sipanje  $e^-\nu_e \rightarrow e^-\nu_e$ : upoštevamo izmenjavo  $W^+$ , izmenjave  $Z$  pa zaenkrat še ne (jo bomo upoštevali ko pridemo do tega pri teoriji).

Model Sonca in jedrskih reakcij v njem napoveduje, da je tok elektronskih nevtrinov na Zemeljski površini  $j_i(\nu_e) = 5 \cdot 10^6 / (s \cdot cm^2)$  (seveda, če se na poti  $\nu_e$  ne spreminjajo v  $\nu_\mu$  ali  $\nu_\tau$ , torej če ni nevtrinskih oscilacij). Kako težak detektor iz vode bi morali zgraditi, da se bodo v njem zgodilo v povprečju 10 sipanj  $e^-\nu_e \rightarrow e^-\nu_e$  na dan? Predpostavi, da imajo vsi Sončni nevtrini enako vpadno energijo ( $E_\nu = 10$  MeV) in pri sipanju zanemari  $m_e$  (v resnici dajejo nekatere sončne jedrske interakcije zvezne, druge pa diskretne spektre nevtrinov, večina pa jih ima energijo na območju 0.1 – 10 MeV).

Eksperimenti podobni opisanemu eksperimentu so izmerili  $j_i \simeq 2 \cdot 10^6 / (s \cdot cm^2) < 5 \cdot 10^6 / (s \cdot cm^2)$ , kar je skupaj z drugo neodvisno vrsto eksperimentov pripeljalo do potrditve nevtrinskih oscilacij:  $\nu_e$  se na poti od sonca spreminjajo v  $\nu_{\mu,\tau}$  - kar posredno dokazuje, da imajo nevtrini maso.

(Halzen Martin, poglavje 12.7)



4. Določi razvejitevno razmerje za razpad  $B^- \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau$  in ga primerjaj z izmerjenim  $Br^{exp}(B^- \rightarrow \tau^- \nu_\tau) = (1.65 \pm 0.34) \cdot 10^{-4}$ .

Podatki:  $|V_{ub}| \simeq 0.0035$ ;  $f_B = 0.19$  GeV,  $m_\tau = 1.8$  GeV,  $m_B = 5.3$  GeV,  $\tau_B = 1.64 \cdot 10^{-12}$  s.

Kvarka  $u$  in  $b$  v mezonu  $B$  nista prosta zato *ne* smemo uporabiti rešitev za prost fermion:  $j_W^\mu[B(P)] \neq \bar{u}(p)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p')$ . Za izračun bi morali poznati valovni funkciji  $u$  in  $b$  v mezonu  $B$ , le teh pa ne vemo. Zato tok  $j_W^\mu[B(P)]$  parametriziramo z neznano konstantno  $f_B$ , iz Lorentzove simetrije pa vemo, da mora biti tok sorazmeren z  $P^\mu$ :  $j_W^\mu[B(P)] = if_B P^\mu$  za mezon  $B$  z momentom  $P$ . Z teoretičnim študijem mezona  $B$  so določili  $f_B = 0.19$  GeV.

5. Določi matrični element  $\mathcal{M}$  za razpad  $D_s^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ , pri čemer obravnavaj fiktivni svet v katerem ima  $\bar{\nu}_\mu$  dano ne-ničelno in ne-zanemarljivo maso  $m_{\nu_\mu} \neq 0$ . Zanima nas končno stanje v katerem ima  $\mu^-$  gibalno količino  $\vec{p} = (0, 0, p_z)$  in  $s_z = -1/2$ ,  $\bar{\nu}_\mu$  pa gibalno količino  $-\vec{p} = (0, 0, -p_z)$  in  $s_z = 1/2$ . Ali je tako končno stanje mogoče za brezmasni  $\bar{\nu}_\mu$ ?  $D_s^-$  ima kvarkovsko sestavo  $\bar{c}s$  in razpadno konstanto  $f_{D_s}$ . Pomen razpadne konstante je razložen pri prejšnji nalogi: privzemi torej  $j_W^\mu[D_s(P)] \equiv if_{D_s} P^\mu$ .
6. Kateri je glavni razpadni način  $\pi^+$ ? Določi njegov življenski čas ob predpostavki, da lahko ostale razpadne načine zanemariš. Določi še razmerje  $\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e)/\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)$  in razmisli zakaj je majhno.

Podatek:  $f_\pi = 0.13$  GeV, ostale podatke pa poišči v PDG.

## 2.8 Transformacija parnosti in konjugacije naboja

1. a) Ali je mirujoč pion lastno stanje transformacije parnosti  $\hat{P}$  (oziroma inverzije prostora)? Če je - kolikšen je P (poglej v PDG).
- b) Ali je pion z  $\vec{p} = (0, 0, p_z)$  lastno stanje transformacije parnosti  $\hat{P}$ ?
- c) Ali je  $Y(1s) = \bar{b}b$  lastno stanje konjugacije naboja? Če je - kolikšen je C (poglej v PDG).
- d) Ali je  $K^- = \bar{u}s$  lastno stanje konjugacije naboja?
- e) Za proces  $\pi^+(p=0) \rightarrow \mu^+(p=-p_z \vec{e}_z, s_z=+1/2) + \mu_\mu^+(p=p_z \vec{e}_z, s_z=-1/2)$  nariši
  - proces dobljen z inverzijo prostora  $\hat{P}$
  - proces dobljen z konjugacijo naboja  $\hat{C}$
  - proces dobljen z inverzijo prostora in konjugacijo naboja  $\hat{C}\hat{P}$
 Kateri izmed the procesov so mogoči?