

*To so nekakšni izpiski za ustni izpit predmeta Fizikalna merjenja I. Izpiski so rezultat moje priprave na ustni izpit.*

*Zdelo se mi jih je škoda zavreči, zato sem se odločil, da jih objavim na spletu, kjer bi utegnili komu koristiti.*

*V izpiskih je verjetno tudi nekaj napak, tako vsebinskih kot tudi slovničnih, ker so bili dejansko po domače povedano "na hitro skup spacani", zato tudi čuden format datoteke (\*.nb), saj sem jih spisal res na hitro. Dejstvo pa je da sem si zaradi strnjene oblike z njimi pomagal pri ponavljanju teorije. Upam, da se bodo še komu izkazali za koristne.*

*Lep pozdrav,*

*Dj FIS ©, FMF-UNI*

1. Združevanje meritev

Na primer imamo dve ločeni opazovanji:

Prvo opazovanje ( $\bar{z}_1, \sigma_1$ )

Drugo opazovanje ( $\bar{z}_2, \sigma_2$ ). Privzamemo, da so izmerki naključne spremenljivke porazdeljeni NORMLANO ali GAUSSOVO z disperzijo  $\sigma^2$

$N(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma^2}}$ , kjer je x vrh porazdelitvene funkcije.  $N(x, \sigma)$  pomeni porazdelitev okoli vrednosti x z disperzijo  $\sigma^2$ .

disperzija ali varianca =  $\sigma^2$

standardna deviacija ali standardni odklon (ali negotovost) =  $\sigma$ .

Ozadje te porazdelitve se nahaja v centralnem limitnem izreku, ki pravi, da vsota velikega števila neodvisnih spremenljivk teži proti normalni porazdelitvi, ne glede na zakone posameznih spremenljivk v vsoti. Normalna porazdelitev je navadno vedno dober približek.

Meritev tako predstavmo kot neko vrednost z disperzijo  $\sigma^2$ .

Če imamo n meritev, se disperzija n-krat zmanjša (govorimo o disperziji srednje vrednosti teh n izmerkov).

$$(\sigma_1)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Enačba za disperzijo velja le, če so spremenljivke v vsoti med sebojno statistično neodvisne ali nekorelirane. To pomeni, da velja za vsak par spremen-

$$\overline{\text{Ijv}} (x_i - \bar{x}_i) (x_j - \bar{x}_j) = 0$$

Izmerek je linearna kombinacija spremenljivk:

$$z = a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + \dots$$

Drugi opazovalec je izmeril isto veliko izmerkov, ki jih je  $m$  veliko, z isto disperzijo  $\sigma^2$ . Nova disperzija je analogno

$$(\sigma_2)^2 = \frac{\sigma^2}{m}$$

En opazovalec (recimo mu profesor), ki ima na voljo vseh  $n+m$  meritev, bo v povprečju tako bližje pravi vrednosti.

$$\bar{x} = \frac{1}{n+m} \sum_{i=1}^{n+m} z_i, \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n+m}$$

rezultat združenih meritev je sledeč:

$\bar{x} = \bar{z}_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} * (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)$ , kjer je prvi člen na desni strani enačbe prejšnja meritev, prvi faktor v drugem členu je utež ali tudi ojačevalni faktor, zadnji faktor v drugem členu pa je inovacija.

$$\sigma_{\bar{x}}^{-2} = n * \sigma^{-2} + m * \sigma^{-2}$$

Do istega pridemo, če rečemo

$$\bar{z}_1 = x + r_1$$

$\bar{z}_2 = x + r_2$ , kjer sta  $r_1$  in  $r_2$  normalno porazdeljena šuma. Šum pomeni vsako negotovost, ki je povezana z merjeno količino, ne samo kolebanja izmerkov zaradi fizikalnih vplivov.

$x$  pa je prava vrednost.

Ocena  $\bar{x}$  se išče z linearno kombinacijo  $\bar{z}_2$  in  $\bar{z}_1$ . Torej:

$$\bar{x} = \alpha * \bar{z}_1 + \beta * \bar{z}_2. \text{ Iščemo torej } \alpha + \beta.$$

$$\text{Velja } \alpha + \beta = 1$$

Iščemo torej:

$$\frac{d\sigma_{\bar{x}}^2}{d\alpha} = 0$$

Dejansko iščemo tak  $x$ , da bo forma:

$$2J(x) = \frac{(x - \bar{z}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x - \bar{z}_2)^2}{\sigma_2^2} = \min, \text{ kjer sta } x - \bar{z}_1 = r_1 \text{ in } x - \bar{z}_2 = r_2.$$

To je dejansko metoda najmanjših kvadratov.

## 2. Beli šum

Pri meritvah imamo vedno prisoten merilni šum. Šumi pri različnih meritvah so med seboj nekorelirani. Pri vedno pogostejšem merjenju moramo ustrezno povečati šum, da ostane časovni razvoj disperzije  $\sigma_x^2$  približno enak. Če tega

ne bi naredili, bi ocena  $\bar{x}$  v poljubno kratkem času prešla k pravi vrednosti, vendar se to v realnosti nikoli ne zgodi. Ko povečujemo pogostost meritve postajajo namreč sosednje meritve vse bolj korelirane in nosijo vse manj informacije o merjeni količini. V zelo zelo kratkih časih se namreč zgodi nič novega. Korelacijo zato najlažje v enačbi upoštevamo pri meritvah tako, da ostane produkt  $(\sigma^2 T)$  konstanten. Če smo na začetku privzeli, da so meritve med seboj neodvisne in tako tudi šumi med seboj nekorelirani:  $\langle r_i r_j \rangle = (\sigma^2 T) \frac{\delta_{ij}}{T}$

Če zapišemo  $r_i = r(t)$  in  $r_j = r(t')$  imamo potem v limiti, ko gre  $T$  proti 0:

$$\langle r(t)r(t') \rangle = R\delta(t-t')$$

Šum s to lastnostjo je BELI ŠUM. Ime beli šum sledi iz bele svetlobe, kjer je močnostni spekter tako porazdeljen, da so vsi trije RGB receptorji v očesu enakomerno vzdraženi.

### 3. Korelacijski koeficient

Kadar navadno merimo s senzorji neke količine, te niso nekorelirane, ampak imajo določeno stopnjo koreliranosti.

Preprost primer tega je senzor s katerim merimo položaj in hitrost. Očitno je, da sta količini hitrost in položaj korelirani, saj ju po ekstrapolaciji v čas  $t+T$  povezuje enačba  $x(t+T) = x(t) + v \cdot T$ , kjer je  $x(t)$  položaj po času  $T$ .

Zaradi tega lahko sklenemo, da sta korelirani tudi negotovosti lege in hitrosti ( $m_x$  in  $m_v$ )

$$\bar{x} = x + m_x \quad \text{in} \quad \bar{v} = v + m_v.$$

Sedaj podobno kot pri združevanju meritev iščemo takšne koeficiente povezanosti med  $x$  in  $v$ , da bodo negotovosti lege minimalne. Predpostavimo tudi, da merilni šum ( $r$ ) ni koreliran z negotovostmi. Preden se nadaljuje pot do korelacijskega koeficienta bomo napisali še enkrat s čim imamo opravka, da ne bo zmede. Torej:

$\bar{x} = x + m_x$ ;  $\bar{x}$  = ocena za pot,  $x$  = pot,  $m_x$  negotovost poti ali tudi nek šum

$\bar{v} = v + m_v$ ;  $\bar{v}$  = ocena za hitrost,  $v$  = hitrost,  $m_v$  negotovost hitrosti.

$z = x + r$ ;  $z$ ;  $z$  = izmerek poti,  $x$  = pot,  $r$  = merilni šum izmerka.

$\hat{x}$  = izostrena ocena poti

$\hat{v}$  = izostrena ocena hitrosti

Torej nastavek, za izostritev:

$$\hat{x} = a_1 \bar{x} + a_2 \bar{v} + a_3 z \quad (*)$$

$$\hat{v} = b_1 \bar{x} + b_2 \bar{v} + b_3 z \quad (')$$

Po logičnem razmisleku lahko postavimo  $a_2 = 0$  in  $a_1 + a_3 = 1$  in podobno  $b_2 = 1$  in  $b_1 + b_3 = 0$ .

Ko v enačbi (') in (\*) vstavimo gornje enakosti dobimo:

$\hat{x}=x+p_x$  in  $\hat{v}=v+p_v$ , kjer sta  $p_x$  in  $p_v$ :

$$p_x=a_1m_x+(1-a_1)r \text{ in } p_v=m_v+b_1m_x-b_1$$

Mi torej iščemo  $\frac{\partial \langle p_x^2 \rangle}{\partial a_1}=0$  in podobno za  $p_v$ . Omeniti velja, da po privzetku

$$\langle m_i * r \rangle = 0$$

$$\text{Dobimo sledeči rešitvi: } a_1 = \frac{\sigma^2}{\langle m_x^2 \rangle + \sigma^2} \text{ in } b_1 = - \frac{\langle m_x m_v \rangle}{\langle m_x^2 \rangle + \sigma^2}$$

Vidimo, da je ostrina ocene povezana s korelacijo negotovosti  $\langle m_x m_v \rangle$ . Ta člen, lahko zapišemo tudi drugače in sicer:

$$\langle m_x m_v \rangle = \langle (\bar{x}-x)(\bar{v}-v) \rangle = \rho_{xv} m_x m_v$$

Tu je  $\rho_{xv}$  KORELACIJSKI KOEFICIENT med negotovostima. Kovariančna matrika pa podaja statistiko šumov. Za ta primer bi bila kovariančna matrika sledeča:

$$M = \begin{pmatrix} \langle m_x^2 \rangle & \langle m_x m_v \rangle \\ \langle m_x m_v \rangle & \langle m_v^2 \rangle \end{pmatrix}.$$

### Vektorska meritev - dinamična ekstrapolacija

$$\hat{z} = H \bar{x} + \hat{r}$$

H = matrika senzorjev

Pri dinamični ekstrapolaciji vektorskih meritev predpostavimo splošno dinamično enačbo, ki se ji pokorava vektor x.

$\bar{x}_{n+1} = \phi_n * x_n + c_n + \Gamma_n * w_n$ ,  $\phi$  in  $\Gamma$  sta matriki,  $c_n$  znan vektor,  $w_n$  pa naključno vektorsko zaporedje s povprečjem nič in in znano kovariančno matriko:

$$\langle w_n * w_n' \rangle = Q_n \delta_{nn'}$$

Zapišemo lahko  $\bar{x}_{n+1} = \phi_n \hat{x}_n + \hat{c}_n$ . Iz tega sledi kup enačb, ki nekaj pomenijo in lahko mešaš vse skup križem kražem pa dobiš žolco. Torej:

$$a) M_{n+1} = \phi_n P_n \phi_n^T + \Gamma_n Q_n \Gamma_n^T$$

$$b) P_{n+1} = M_{n+1} - M_{n+1} H^T (H M_{n+1} H^T + R_n)^{-1} H M_{n+1}$$

$$c) K_{n+1} = P_{n+1} H^T R^{-1}$$

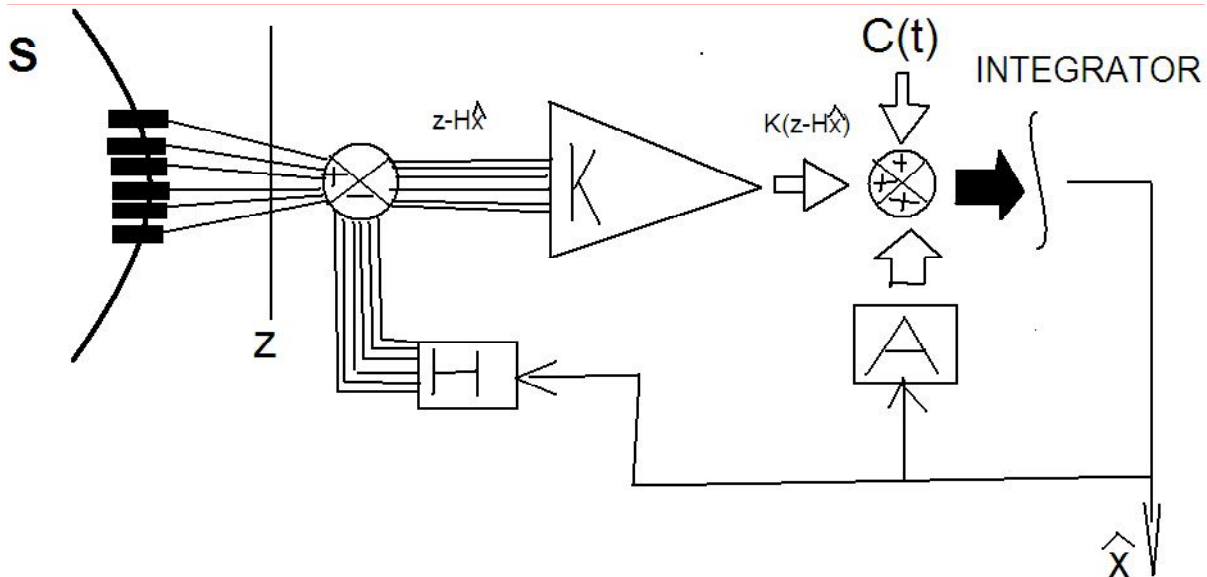
$$d) \bar{x}_{n+1} = \phi_n * x_{n\text{streha}} + c_n$$

$$e) \hat{x}_{n+1} = \bar{x}_{n+1} + K_{n+1} * (z_{n+1} - H \bar{x}_{n+1})$$

a) pove, kako napovemo kovariančno matriko ocene  $\bar{x}_{n+1}$  za korak v prihodnosti od časa  $nT$  v čas  $(n+1)T$

b) je z indeksi opremljena ena splošnejša enačba, ki vpelje kovariančno matriko ocene xpuščicačrta iz enačbe e) in

omogoča račun optimalnega inovacijskega ojačevalnega faktorja (enačba c)).  
 d) nam ekstrapolira oceno xstreha v čas  $(n+1)T$ . Rečemo lahko, da pravilno izbran parameter  $Q_n$  pri dinamičnem šumu skrbi za ustrezno pozabljanje starih izmerkov  $z_n$ . Enačbe v tej obliki predstavljajo Kalmanov filter.



#### 4. Optimalni senzor 1. reda

Preden gremo dejansko na senzor 1. reda še komentar k zgornji sliki, ki prikazuje grafično predstavitev enačbe

$\dot{\hat{x}} = A(t) * \hat{x}(t) + c(t) + K(t) * [z(t) - H \hat{x}(t)]$ . Tolmačenje slike oziroma enačbe je zelo preprosto. Količine  $x$  v sistemu  $S$  tipamo z več sensorji, zato je inovacija  $(z - H \hat{x})$  vektor, ojačevalni faktor pa od časa odvisna matrika. Kjer je črna puščica imamo  $\dot{\hat{x}}$ , ki ga vodimo še na integrator in dobimo na izhodu  $\hat{x}$ .

Izhodne količine iz merilnika  $\hat{x}$  vodimo preko senzorske matrike  $H$  nazaj na vhod, kjer jih primerjamo z izhodom iz sensorjev. Če sta sistema  $S$  in  $M$  usklajena ( $M$  je na sliki desno od črte z oznako "z"), je inovacija beli šum s povprečjem nič, sicer pa popravlja izhodne količine iz merilnega sistema.

Doslej smo z izrazom senzor označevali idealno napravo brez lastne dinamike, ki je na izhodu dala izmerek  $z = Hx + r$ , V praksi je senzor samostojna naprava, ki je v neposrednem stiku z merjenim sistemom  $S$ . Ugodno je, da je občutljiv le na eno vhodno količino, ki jo na izhodu da ven navadno v obliki električne napetosti. S stališča dinamike je pomembno, da se izhodna napetost čimprej uskladi z merjeno količino in da senzor sam odpravi čim več šuma na izhodu, predvsem pa je pomembno, da senzor čim manj moti sistem  $S$ .

Senzor PRVEGA reda je optimalen za merjeni sistem  $S$ , ki ga opišemo s skra-

jno nerazčlenjeno dinamično enačbo

$$\dot{x}=w$$

Edina obravnavana spremenljivka obravnavanega sistema S je torej  $x$ , katere odvod po času ima konstantno ansambelsko povprečje. Dinamični šum ima znano disperzijo  $\langle w(t)w(t') \rangle = Q\delta(t-t')$ .

Kljub preprosti enačbi, pa je lahko mnogo raznolikih rešitev. Če naj bo senzor torej občutljiv na količino  $x$ , potem občutljivost na kake druge količine zajamemo statistično z merilnim šumom z znano skalarno kovarianco

$$\langle r(t)r(t') \rangle = R\delta(t-t'), \quad \text{tako da je } z=x+r.$$

Berljiva količina senzorja, se torej pokorava merilni enačbi:

$$\dot{\hat{x}}=K(z-\hat{x}), \quad \text{kjer je } z \text{ (časovni) potek sistema S, } \hat{x} \text{ pa odziv senzorja 1. reda.}$$

$K$  je ojačevalni faktor senzorja, ki zadošča diferencialni enačbi

$$\dot{P}=Q-\frac{P^2}{R}$$

Vendar pri tem senzorju  $K$  ni mogoče spreminjati, zato uporabimo stacionarno vrednost  $K_\infty = \frac{P_\infty}{R}$

Ker mora pač  $P$  biti stacionaren dobimo ven, da je  $K_\infty = \sqrt{\frac{Q}{R}}$

Označimo  $\tau = \frac{1}{K_\infty}$  in dobimo opis senzorja 1. reda z enačbo:

$$\tau \dot{\hat{x}} + \hat{x} = z, \quad \text{kjer je } z \text{ potek v sistemu S, } \hat{x} \text{ pa odziv senzorja na to.}$$

Pri optimalnem senzorju ne dobivamo ven pristranskih izhodov, imamo  $\langle \hat{x} \rangle = x$ . Npr pri termometru ne dobimo tega, imamo  $\langle \hat{x} \rangle \neq x$  in res izhod senzorja je pri merjenju temperature zakasnen glede na merjeno temperaturo.

5. Kako se odzove senzor prvega reda na stopnico (HevisideTheta[t])?

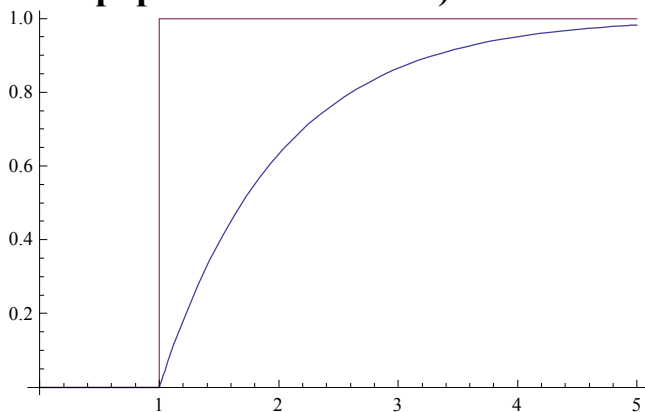
Imamo enačbo:

$$\tau \dot{\hat{x}} + \hat{x} = H[t]$$

$$\text{Rešitev: } x[t] \rightarrow \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t-1}{\tau}} & t > 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Rešitev je eksponentno približevanje, ki je prikazano na spodnji sliki (stopnica

nastopi pri času 1 sekunda):



**Senzor drugega reda (optimalni):**

Podobno, kot senzor 1. reda, le da ima bogatejšo dinamiko in sicer ga opišemo takole:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w}$ , kjer je  $\mathbf{w}$  SPET BELI ŠUM s povprečjem nič in znano disperzijo, katere enačba je navedena že višje.

Senzor naj bo občutljiv na količino  $\mathbf{x}$ , ki zadošča enačbi  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , in imamo  $\mathbf{H}[0,1]$ .

V vektroski obliki imamo torej napetost  $\hat{\mathbf{x}}$ , ki se pokorava enačbi:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{pmatrix} + \mathbf{P} * \mathbf{H}^T * \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \hat{\mathbf{x}}), \text{ kjer je } \mathbf{P} * \mathbf{H}^T * \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{K}$$

(§)

$\mathbf{K}$  = ojačevalni faktor,  $\mathbf{P}$  = kovariančna matrika,  $\mathbf{H}$  = matrika senzorjev,  $\mathbf{R}$  pride iz merilnega šuma.

V enačbah spodaj, bomo uporabljali tudi simbol  $\mathbf{Q}$ , ki pa pride iz dinamičnega šuma. Za oboje  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{Q}$  velja zdaj že skoraj znana enačba  $\langle \mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t') \rangle = \mathbf{Q} \delta(t-t')$ . Če poznamo  $\mathbf{R}$  imamo predvidljiv senzor. Če poznamo  $\mathbf{Q}$  imamo predvidljivo nenatančno dinamiko modelskega sistema.

$\mathbf{P}$  se mora tudi tu pokoravati enačbi kot zgoraj, le da je malo bolj kompleksna:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{P}^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}$$

$A$  = prehodna matrika našega modela, ki se sklicuje še na prejšnje stanje (novo stanje je v času  $(n+1)T$ ,  $A$  se torej sklicuje še na čas  $nT$ ).

Iz pogoja stacionarnosti  $\dot{P}_\infty=0$ , dobimo ven temu ustrezne pogoje in rešitev za elemente matrike  $P$ .

Matrika  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xv} \\ p_{xv} & p_{vv} \end{pmatrix}$$

$$p_{xx} = \sqrt{2R\sqrt{RQ}}$$

$$p_{xv} = \sqrt{RQ}$$

$$p_{vv} = \sqrt{2Q\sqrt{RQ}}$$

(§) napišemo po komponentah, nas bo zanimala samo ta prva komponenta, s ta drugo komponento pa se bomo znebili hitrosti v enačbi prve komponente in sicer:

$$K_\infty = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} p_{xx} \\ p_{vv} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{v} + p_{xx} * R^{-1} * (z - \hat{x}) \quad (\text{AAA})$$

$$\dot{\hat{v}} = p_{vv} * R^{-1} * (z - \hat{x}) \quad (\text{BBB})$$

Odvajamo še enkrat po času (AAA), kjer kot stranski produkt zgeneriramo  $v\_streha\_pika$ , ki ga zamenjamo z enakostjo (BBB).

Če še označimo  $2\zeta\sqrt{\frac{p_{xv}}{R}} = \frac{p_{xx}}{R}$  in  $\omega^2 = \sqrt{\frac{Q}{R}}$ , kjer je  $\zeta$  koeficient dušenja - optimalni je  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  in  $\omega$  = frekvenca, dobimo

za  $\hat{x}$  enačbo 2. reda, kjer smo še eliminirali člen, ki vsebuje  $\dot{\hat{x}}$ , saj običajno senzorji niso občutljivi na odvod.

$$\ddot{\hat{x}} + 2\zeta\omega\dot{\hat{x}} + \omega^2\hat{x} = \omega^2 z(t)$$

Na levi imamo v bistvu dušeno harmonično nihalo, na desni pa tisto, kar ga



poganja.

Do koeficienta dušenja so graditelji senzorjev prišli izkustveno.

## 6. Odziv optimalnega senzorja 2. reda na $\delta$ (DiracDelta[t])?

Imamo enačbo:

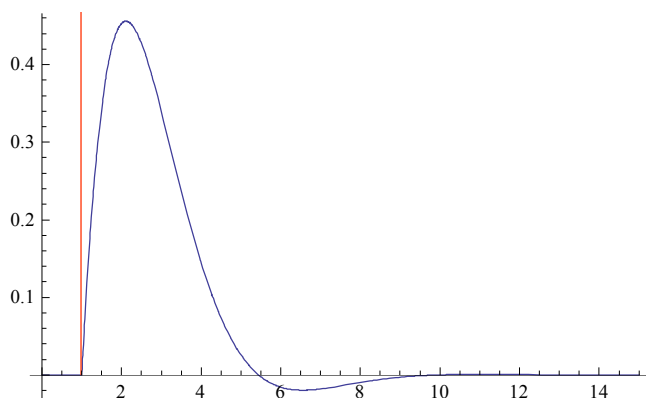
$$\ddot{\hat{x}} + 2\zeta\omega\dot{\hat{x}} + \omega^2\hat{x} = \omega^2*\delta(t)$$

Rešitev je:

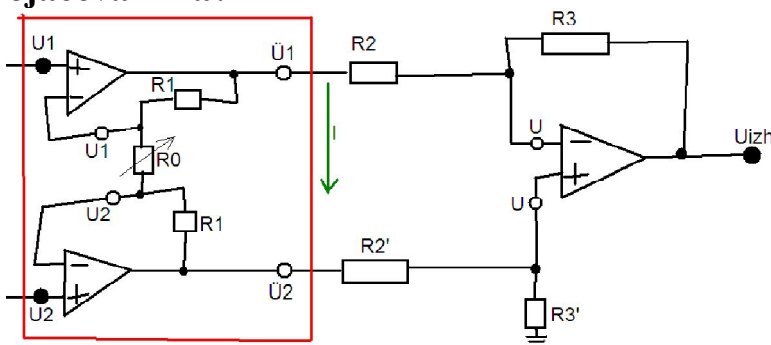
$$\mathbf{x}[t] \rightarrow \sqrt{2} e^{-\frac{(-1+t)w}{\sqrt{2}}} w \text{HeavisideTheta}[-1+t] \text{Sin}\left[\frac{(-1+t)w}{\sqrt{2}}\right], \text{ kar je}$$

Greenova funkcija za sistem 2. reda z optimalnim dušenjem, če postavimo  $w = 1$ .

Odziv je prikazan na spodnji sliki (Delta nastopi pri času 1 sekunda) in vidimo, da dobimo nihanje. Čim bolj je koeficient dušenja blizu optimalni vrednosti, tem prej se odziv umiri.



## 7. Predojačevalna stopnja instrumentacijskega ojačevalnika?



Na sliki je univerzalni instrumentacijski ojačevalnik. V rdečem okvirju je predojačanje (dve pikici ne pomenita odvoda, samo oznake).

Tok, ki teče skozi vezje v rdečem okvirju je:

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R_0} = \frac{U_2 - \ddot{U}_2}{R_1} \text{ in}$$

$$\frac{U_1 - U_2}{R_0} = \frac{\ddot{U}_1 - U_1}{R_1}$$

Obe enačbi seštejemo in upoštevamo, da je  $z = U_1 - U_2$  in dobimo predojačevalno stopnjo:

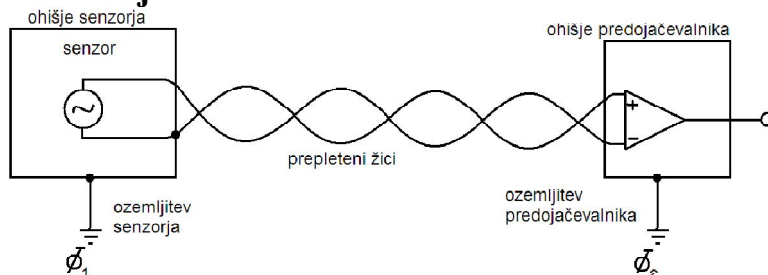
$\ddot{U}_1 - \ddot{U}_2 = (2 \frac{R_1}{R_0} + 1) z$ , kjer je izraz v oklepaju predojačanje.

Po podobni obravnavi še nadaljnjega vezja dobimo na izhodu celotnega vezja potem:

$U_{izh} = \frac{R_3}{R_2} (2 \frac{R_1}{R_0} + 1) z$ , pri čemer izberemo, tako nastavitve uporov, da velja  $\frac{R_2'}{R_3'} = \frac{R_2}{R_3}$  in imamo čisto diferencialno delovanje vezja. V realnosti seveda ne moremo doseči tako malih uporov in imamo majhne razlike, tako da v bistvu pride skozi vezje tudi vsota, ki pa jo UIO pomnoži z zelo majhnim številom, tudi milijonkrat manjšim, kot pa pomnoži razliko, tako da v praktični uporabi vezje še vedno dobro deluje.

## 8. Kako ozemljiti senzor (shema z instrumentacijskim ojačevalnikom)

Rešitev je na sliki:



$\Phi_1$  in  $\Phi_2$  sta potenciala, na katera sta priključeni zemlji.

## 9. Spektralna gostota belega šuma, graf spek. gostote na uporu in RC-členu.

Če imamo izvor napetosti, upornik in kondenzator, ki sestavljata RC vezje pri sobni temperaturi, ne moremo meriti napetosti do poljubne natančnosti tudi zaradi termičnega šuma. Če privzamemo, da je napetost na uporniku  $U(t)$  dobimo enačbo za povprečje kvadrata napetosti na kondenzatorju:

$$p = \frac{k_B T R}{RC}. \text{ Pri } \tau = 1 \mu s, T = 300 K, R = 1 M \Omega, \text{ dobimo}$$

kolebanje napetosti  $\sqrt{p} = 70 \mu\text{V}$ , kar pomeni, da je zelo težko izmeriti s standardnimi metodami napetosti nekaj  $10 \mu\text{V}$ .

Pri termičnem šumu v vezjih govorimo o njegovi spektralni gostoti. Pri šumu nas zanima kolikšno povprečno moč  $d\langle P \rangle$  nosi upor  $R$  kolebanje napetosti v ozkem frekvenčnem intervalu dolžine  $d\omega$  pri dani frekvenci  $\omega$ . Ker je

$$\langle P \rangle = \frac{\langle U^2 \rangle}{R},$$

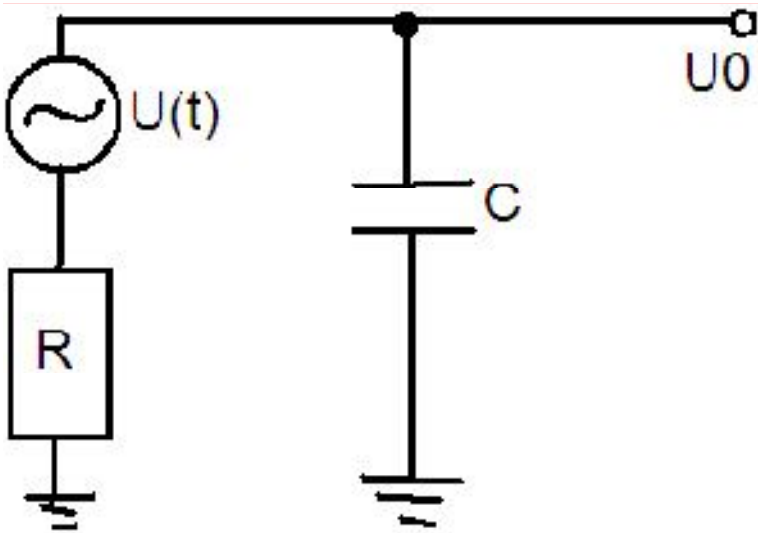
velja  $\frac{d\langle U^2 \rangle}{d\omega} = \frac{R dP}{d\omega}$ . Izraz na levi imenujemo spektralna gostota šuma. Če imamo naprimer na izhodu iz vezja vsoto harmoničnih signalov pri različnih frekvencah  $\omega$  z različnimi amplitudami in fazami, potem lahko ansambelsko povprečje kvadrata napetosti napišemo, kar kot vsoto kvadratov posameznih komponent, saj mešani členi odpadejo, če so le faze neodvisne med seboj. Zato je smiselno vpeljati spektralno gostoto, saj lahko izhod iz vezja posplošimo na poljubno število frekvenc.

Vezje s katero določimo spektralno gostoto šuma sta dva upora povezana s koaksialnim kablo, kjer na en konec damo generator naključne napetosti, ki simulira termične fluktuacije. Kabel je tako prek uporov v termičnem ravnovesju in lahko zanj uporabimo Planckov zakon v eni dimenziji. Na koncu dobimo, da je spektralna gostota enaka:

$$\frac{d\langle U^2 \rangle}{d\omega} = \frac{2R}{\pi} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \approx \frac{2k_B TR}{\pi}, \text{ za } \hbar\omega \ll kT. \text{ Vidimo, da je spektralni šum v približku}$$

kar konstanten in je pri sobni temperaturi zelo natančen, saj je mejna frekvenca  $\omega$  reda  $10^{13} \text{ s}^{-1}$ .

Zanimivo je proučevati širjenje termičnega šuma od upora skozi linearni sistem, kjer ni drugih uporov. Tak sistem je RC člen (malo višje smo imeli pa RC vezje). RC člen:



Če napišemo prenosno funkcijo za tak sistem:

$$\frac{U_0(s)}{U(s)} = H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad s = i\omega$$

Za spektralno gostoto dobimo:

$$\frac{d\langle U_0^2 \rangle}{d\omega} = |H(i\omega)|^2 \frac{d\langle U^2 \rangle}{d\omega} = |H(i\omega)|^2 \frac{2kT}{\pi} R, \text{ kjer smo v drugi faktor na sredini}$$

vstavili zgornji rezultat.

Spektralna gostota na kondenzatorju je:

$$\frac{d\langle U_0^2 \rangle}{d\omega} = \frac{2kT}{\pi} \frac{R}{(\tau\omega)^2 + 1}.$$

Rezultat je znan kot Nyquistov izrek in je v splošni verziji:

$$\frac{d\langle U_0^2 \rangle}{d\omega} = \frac{2kT}{\pi} \operatorname{Re} Z_0 \text{ in pomeni, da lahko splošno za vsak linearen sistem}$$

napišemo spektralno gostoto z realnim delom izhodne impedance vezja.

### Meritve konstantnih količin in statistika

Preden povemo, kaj je studentova porazdelitev na kratko o meritvah konstantnih količin in statistiki.

Senzor preizkušamo tako, da merimo z njim znano količino  $x$ , ki se s časom ne spreminja. V tem primeru je

$$z - Hx = r.$$

Če je šum stacionaren, je naša naloga iz  $n$  senzorskih izmerkov z določiti njegovo povprečno vrednost

$\bar{r}$  in disperzijo  $R$ , ki jo potrebujemo pri nadaljnjih fazah postavitve in nastavitve merilnega instrumentarija. Želeli bi tudi

izvedeti, ali je porazdelitveni zakon, ki se mu šum pokorava res Gaussov, kot smo doslej vedno privzeli. Odgovore dobimo s pomočjo statistike.

Kadar parametrov normalne porazdelitve ne poznamo vnaprej jih moramo čim boljše določiti iz čim večjega števila izmerkov. Če je izmerkov veliko, naredimo histogram in mu prilagodimo čimboljšo Gaussovo krivuljo.

Kadar pa je meritev malo, se iskanja parametrov lotimo sistematično in poleg ocene najdemo še interval znotraj katerega z določeno vnaprej predpisano verjetnostjo leži prava vrednost. Ponavadi nam same vrednosti ne povejo dosti, moramo še vedeti koliko ji lahko zaupamo.

## 10. Studentova porazdelitev

Studentovo porazdelitev vpeljemo na naslednji način:

Denimo, da smo že  $n$ -krat izmerili signal  $z$  iz sensorja. Zanesljivo vemo, da so izmerki med seboj nekorelirani in porazdeljeni po istem normalnem zakonu, katerega parametrov ne poznamo. Želimo oceniti povprečno vrednost  $a$  in disperzijo  $R$  (ali negotovost  $\sqrt{R}$ ). V ta namen naredimo vzorčni funkciji ali statistiki:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

$\bar{z}$  = povprečje,  $S^2$  pa je varianca.

To dvoje združimo v tretjo statistiko  $T = \frac{\bar{z}-a}{\sqrt{S^2}} \sqrt{n}$  in pravimo, da če so  $z_i$  pora-

zdeljeni normalno po zakonu

$N(a, \sqrt{R})$ , kjer je  $a$  geometrijsko središče krivulje, je naključna spremenljivka

$T$  porazdeljena Studentovo z  $n-1$  prostostnimi stopnjami in jo označimo s  $S(n-1)$ , to je:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1}{\sqrt{n-1} B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})} (1 + \frac{T^2}{n-1})^{-\frac{n}{2}}, \text{ kjer je } B \text{ karakteristična beta funkcija.}$$

Porazdelitev je neodvisna od iskanih parametrov  $a$  in  $R$  in je soda funkcija.

Podobna je normalni, le da ima položnejše repe. Tam, kjer ima ta verjetnostna gostota največjo vrednost izberemo oceno za  $a$  (središče).  $a = \bar{z}$

Na podlagi porazdelitve opredelimo interval, kjer z izbrano verjetnostjo ležijo vrednosti  $T$  in z njimi pripadajoče vrednosti  $a$ . Izberemo si dve meji, glede na kateri potem priredimo verjetnost, da je  $T$  v izbranem intervalu:

$$\int_{t_<}^{t_>} \frac{dP}{dT} dT = 1 - \alpha$$

$\alpha$  = izbrana majhna verjetnost (grafično polovički na obeh repih krivulje).

$1 - \alpha$  je stopnja zaupanja

$\alpha$  je stopnja tveganja.

Pravimo, da le z majhno verjetnostjo  $\alpha$  tvegamo, da  $T$  ni v intervalu zaupanja  $[t_<, t_>]$ . Vrednost  $\alpha$  navadno standariziramo na nekaj karakterističnih vrednosti, saj je kar zamudno analitično računati po porazdelitvenem zakonu za poljuben  $\alpha$ .

S Studentovim testom pa preverjamo, če se naši izmerki (za katere privzamemo, da so Normalo porazdeljeni) pokoravajo privzeti Normalni porazdelitvi, katere srednja vrednost je  $a$  (sepravi, če ima privzeti Normalni zakon ustrezen parameter  $a$ ).

## 11. Porazdelitev $\chi^2$

Zgoraj smo iskali porazdelitev izmerkov. Disperzijo merilnega šuma  $R$  pa iščemo iz te statistike:

$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S^2}{R}$ , ki je odvisna le od  $R$ , porazdelitveni zakon pa ni odvisen od  $R$ .

Porazdelitveni zakon je sledeč:

$$\frac{dP}{d\chi^2} = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2})} (\chi^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \text{ za } \chi^2 \geq 0$$

za  $\chi^2 < 0$ , je porazdelitev 0.

Porazdelitev označujemo s  $\chi^2(n-1)$  in ji rečemo porazdelitev  $\chi^2$  z  $n-1$  prostostno stopnjo.

Za velike  $n$  je porazdelitev podobna Gaussovi s standardno deviacijo  $\sqrt{n}$  in srednjo vrednostjo  $n-1$ .

Podobno, kot prej tudi tokrat določimo spodnjo in zgornjo mejo s pogojem  $1 - \alpha$ :

$$\int_{\chi^2_<}^{\chi^2_>} \frac{dP}{d\chi^2} d\chi^2 = 1 - \alpha.$$

Podobno kot prej razdelimo  $\alpha$  na dva dela, kjer vsaka polovica predstavlja majhno verjetnost na levemu oziroma desnem repu krivulje.

Pogledamo, kje ima porazdelitev maksimum in tam ocenimo disperzijo  $R = S^2$ , krajišči intervala zaupanja pa sta določeni z mejama na gornjem integralu.

### Prilagoditveni testi

S prilagoditvenimi testi preizkusimo, če porazdelitev naključne spremenljivke v izmerjenem vzorcu pomembno odstopa od privzete. Poznamo več testov, ki to omogočajo.

## 12. Pearsonov $\chi^2$ test

Pri tem testu si razdelimo interval v katerem ležijo izmerki  $z_1, z_2, \dots, z_n$  na  $\rho$  intervalov, ki se med seboj ne prekrivajo. Intervalom pravimo razredi, ki naj v celoti prekrijejo območje, kjer je verjetnostna gostota različna od nič.

V razredu  $k$  naj bo  $N_k$  izmerkov izmed  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .

$p_k$  je verjetnost, da izmerek pade v  $k$ -ti razred, kjer sta  $\xi_{k-1}$  in  $\xi_k$  meji  $k$ -tega razreda:

$$p_k = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \frac{dP}{d\xi} d\xi.$$

Ker smo izmerili  $n$  izmerkov, pričakujemo, da bo v  $k$ -tem razredu  $np_k$  izmerkov. Če privzeta verjetnostna gostota res ustreza izidom poskusa, bodo razlike  $N_k - np_k$  v vseh razredih majhne. S testom hi kvadrat ugotavljamo statistično pomembnost odmikov  $np_k$  od  $N_k$ :

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{\rho} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k}$$

Porazdelitveni zakon tkao definirane statistike je v limiti, ko imamo opravka z velikim številom meritev  $n$ , neodvisen od privzete porazdelitvene funkcije in sicer je to zakon  $\chi^2(\rho-1)$ .

Statistiki svetujejo, da tudi pri končnem številu izmerkov privzamemo ta zakon, če je le pričakovano število izmerkov  $np_k \geq 5$  pri vseh  $k$ .

Če si določimo zgornjo mejo  $\chi^2_{>}$  tako, da je:

$$\int_{\chi^2_{>}}^{\infty} \chi^2(\rho-1) d\chi^2 = \alpha$$

Potem pričakujemo da bo  $\chi^2 < \chi^2_{>}$  z verjetnostjo  $1-\alpha$ , če porazdelitveni zakon ustreza vzorcu.

Število razredov tudi vpliva na moč testa.

Fisherjev izrek na kratko:

Koristen je, kadar ne poznamo parametrov porazdelitvene funkcije in jih moramo oceniti iz same meritve.

Fisherjev izrek pravi, da pri neomejenem naraščanju števila  $n$  limitira verjetnostna gostota za  $\chi^2$  k porazdelitvi

$\chi^2(\rho-m-1)$ , kjer je  $m$  število neznanih parametrov  $q$ .

Iz funkcije zanesljivosti  $L = \prod_{k=1}^n \frac{dP}{dz}(z_k, q_1, q_2, \dots, q_m)$  in reševanjem sistema  $\frac{\partial \text{Log}[L]}{\partial q_i} = 0$  dobimo parametre in z njimi računamo  $\chi^2$ . Porazdelitveni zakon ni natančno znan, vemo pa, da je med  $\chi^2(\rho-m-1)$  in  $\chi^2(\rho-1)$ .

### Test Kolmogorova

Ko imamo na voljo veliko število izmerkov  $z_1, z_2, \dots, z_n$  in želimo preveriti, če podpirajo privzeto zvezno porazdelitveno funkcijo, uporabimo ta test. Formuliran je za zvezno kumulativno porazdelitveno funkcijo  $F(z)$ , definirano z integralom:

$$F(z) = \int_{-\infty}^z \frac{dP}{d\xi} d\xi$$

Če je  $k(z)$  število izmerkov, ki so manjši kot  $z$ , lahko sestavimo eksperimentalno kumulativno funkcijo  $f(z)$  takole:

$f(z) = \frac{k(z)}{n}$ , ki je vedno stopničasta in naraščujoča,  $F(z)$  pa gladka in naraščujoča in velja  $F(\infty) = 1$  in  $f(z) = 1$  za  $z > \max\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .

Pri testiranju je odločilna absolutna vrednost največjega odmika obeh funkcij:

$$D = \sup_{-\infty < z < \infty} \left| f(z) - F(z) \right|$$

Če so izmerki usklajeni s porazdelitvenim zakonom, je ta razlika le izjemoma zelo velika. Kolmogorov je pokazal, da velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(D\sqrt{n} < d) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 d^2}.$$

Pri testiranju si izberemo mejni  $d_<$  tako, da je verjetnost, da bo pri danem vzorcu  $D\sqrt{n}$  manjši od  $d_>$  enaka  $1-\alpha$ .

Če je pri kakem vzorcu  $D\sqrt{n}$  večja od mejnega  $d_>$ , ki ga določimo iz enačbe:  $P(D\sqrt{n} < d_>) = 1-\alpha$ , potem lahko s tveganjem  $\alpha$  zavrtnemo hipotezo, da funkcija  $F(z)$  ustreza izmerkom  $z_i$ .

Ponavadi potrebujemo več kot 80 izmerkov.



### 13. Merjenje z odzivom sistema na periodično motnjo.

Pri tem načinu merjenja s periodično motnjo vzbujamo senzor, ki spremlja sistem S. Perioda te namenoma povzročene motnje je natančno znana, ker jo sami ustvarimo. Linearni sistem se na harmonično vzbujanje s frekvenco  $\omega$  odzove s harmoničnim signalom s prav tako frekvenco, v amplitudi odziva pa je zakodirana vrednost parametra, ki ga želimo izmeriti. Izmerke analiziramo z metodo najmanjših kvadratov z enim samim parametrom. Signal iz sensorja v različnih časih združimo v vektor:

$Z=Hx+v$ , kjer je  $Hx=x_0*\sin[\omega t+\delta]$ .

Z zaporednim, zelo pogostim merjenjem premore strukturna matrika H le en stolpec, njena transponiranka  $G = H^T$  pa le eno vrstico.

$G = [\sin[\delta], \sin[\omega\Delta t+\delta], \dots, \sin[n\omega\Delta t+\delta]]$

Amplituda je  $x_0 = \frac{1}{GH} Gz$ , napaka amplitude pa je približno :

$p \approx \frac{\sigma^2 \Delta t}{\frac{1}{2} T}$ , če gremo v limiti kontinuirane meritve, ko  $\Delta T \rightarrow 0$  in  $\sigma^2 \rightarrow \infty$ , dobimo

zaradi

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sigma^2 * \Delta T = R$

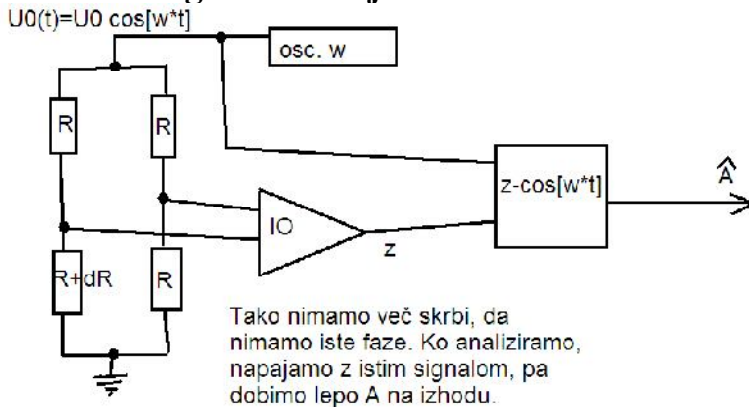
$p \approx \frac{2R}{T}$ .

Z naraščajočim časom gre torej p proti 0 kot  $1/T$ , če smo prepričani, da se amplitudane spreminja s časom in da poznamo frekvenco merjenega signala z. Generator pogonskega signala je vgrajen v sam instrument in služi hkrati kot vir motnje in kot referenčni signal pri analizi odziva z.

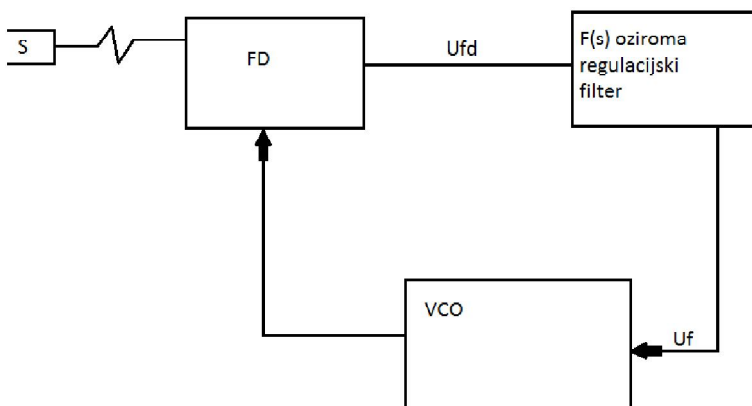
Konkreten tak instrument bi naredili z generatorjem harmoničnega signala, s katerim bi napajali Wheatsonov mostiček, hkrati pa bi imeli tudi referenčni signal, s katerim bi krmilili elektronsko stikalo, ki pripelje na integrator napetost iz diferencialnega ojačevalnika. Pri pozitivnem referenčnem signalu A(t) pripeljemo signal iz diferencialnega ojačevalnika direktno na RC čeln, ki služi kot integrator, pri negativnem signalu A(t) pa na RC člen priklopimo invertiran signal iz diferenčnega ojačevalnika (preklapljanje nam omogoča stikalo, ki ga krmilimo z A(t)). Ker je fazni premik med referenčnim signalom in signalom iz Wheatsonovega mostička enak nič, pride na integrator vedno pozitivna polperioda signala. Signal iz integratorja se tako s časom povečuje linearno, vpliv šuma pa se zaradi povprečevanja relativno manjša. Integrator v konvencionalnih instrumentih namenoma ni idealen, da lahko sledimo spremembam upora v mostičku, ki so počasne v primerjavi s preiido referenčnega signala.

Sistem deluje kot aktivni frekvenčni filter. Njegovo frekvenčno okno se s časom ožja okrog delovne frekvence. Ker sta signal in referenca pripeta en na drugega, pravimo temu fazna detekcija. Periodične motnje, ki imajo frekvenco različno od delovne  $\omega_0$  se močno zadušijo, le amplitudo signala s frekvenco  $\omega_0$  detektiramo nepopačeno. Širina aktivnega okna se manjša kot  $\frac{1}{T}$ . S to metodo lahko merimo v nV področju.

Skica faznega detektorja:



14. Fazno vpeta zanka (shema, kako deluje (naloga posameznega elementa v njej), prenosna funkcija regulacijskega filtra, razmerje med  $\vartheta_e$  in  $\vartheta_1$ )



Shema tega merilnega sistema je na gornji sliki.

Zgrajen je na osnovi sinhronizacije dveh fizikalnih sistemov, v tem primeru modelskega napetostno občutljivega oscilatorja (M) in opazovanega oscilatorja S. Fazno vpeta zanka je zasnovana kot povratna zanka, kjer fazo signala iz modelskega oscilatorja (M) primerjamo s fazo vhodnega signala in glede na razliko reguliramo frekvenco oscilatorja (M). Fazna razlika med vhodnim signalom in izhodom iz oscilatorja (M) opleta okoli ničle z zelo malo ampli-

tudo. Fazni detektor da na izohdu napetost, ki je sorazmerna s fazno razliko med vhodnim referenčnim (merjenim) signalom

$U_s = U_0 \cos[\omega_0 * t + \vartheta_1]$  in izhodom  $U_m = \sin[\omega_0 * t + \vartheta_2]$ . Fazno razliko dobimo s časovnim povprečjem signala  $U_{fd}$  in je ob zanemaritvi nekaterih členov zaradi visoke frekvence približno enak:

$$U_{fd} \approx K_{fd} * \vartheta_e, \text{ kjer je } \vartheta_e = \vartheta_1 - \vartheta_2$$

nadalje je  $U_f$  po prehodu skozi filter enaka:

$U_f = F(s) * U_{fd}$ , od koder lahko izrazimo prenosno funkcijo filtra  $F(s)$ , katerega naloga je da zaduši signale visokih frekvenc, ki jih interpretiramo kot šum, ter poskrbi za stabilnost povratno vezane zanke. Zato je izbira primerne filtra zelo pomembna.

Vsakršno neskladje faz  $\vartheta_1$  in  $\vartheta_2$  vpliva na napetost  $U_{fd}$  in nato tudi na  $U_f$ , ki spremeni frekvenco napetostno reguliranega oscilatorja (VCO - voltage controlled oscillator) tako, da se fazna razlika zmanjša. Tako se frekvenci in fazi referenčnega in izhodnega signala vedno ujameta.

Torej, ko signal v obliki  $U_f$  pride do VCO ima po prehodu obliko:

$\dot{\vartheta}_2 = K_{VCO} U_f = K_{VCO} * K_{fd} * F(s) * \vartheta_e$ , s pomočjo LaPlaca dobimo nato končno obliko:

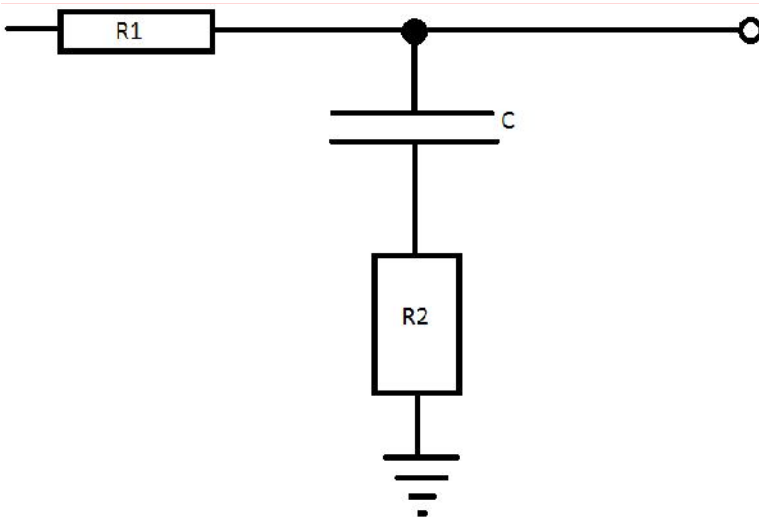
$$\vartheta_2 = \frac{1}{s} K_{VCO} * K_{fd} * F(s) * (\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

Pri načrtovanju filtra so si načrtovalci pomagali z obravnavo kot optimalno povratno zanko z dinamiko za sistem drugega reda in prišli do prenosne funkcije:

$F(s) = \frac{1}{K_{VCO} * K_{fd}} (\frac{K_\omega}{s} + K_\vartheta)$ , kjer je  $K_\omega = \frac{1}{R} p_{xv}$  in  $K_\vartheta = \frac{1}{r} p_{xx}$  od obravnave dinamike drugega reda nekoliko višje.

Pri tem merilnem sistemu običajen RC filter ne zadošča, saj ima samo en parameter  $\tau$ , s katerim se ne da ustrezno neodvisno nastaviti lastne frekvence zanke  $\omega_n$  in koeficienta dušenja  $\zeta$ .

Uporaben je modificiran RC filter:



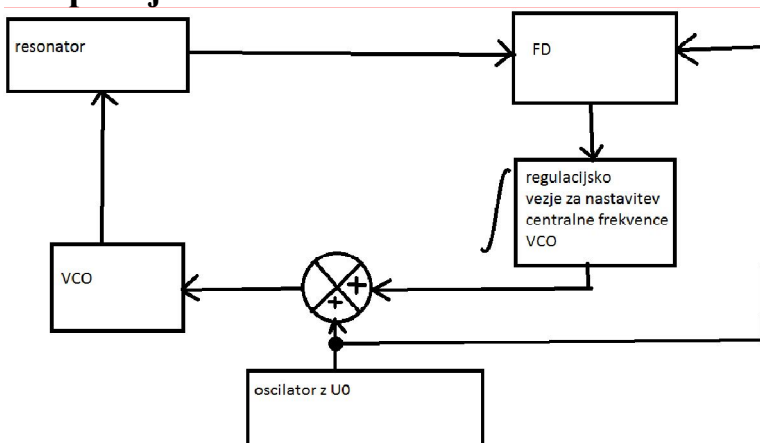
Tak filter ima dva parametra  $\tau_1$  in  $\tau_2$ . Njegova prenosna funkcija je:

$$F(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{1 + (\tau_1 + \tau_2) s}$$

### 15. Vklon na vrh resonance?

To pomeni, da bi radi sklopili merilni sistem z opazovanim resonančnim sistemom tako, da bi bila frekvenca modelskega sistema kar se da blizu resonančni frekvenci opazovanega sistema. Tako bi merili količine, od katerih je resonančna frekvenca odvisna.

Sepravi imamo nek resonator, ki ima izrazito resonačno krivuljo in bi se radi vklonili na njegovo resonančno frekvenco  $\omega_0$ . Vezje s katerim to napravimo je na spodnji sliki:



Iz oscilatorja napajamo z  $U$  VCO s centralno frekvenco  $\omega_c$  (to je pri fizikalnem praktikumu III frekvenca, ki se spreminja pri meritvi ESR).  $U = U_0 \sin[\omega_a t]$ . Amplituda  $U_0$  je ravno takšna, da ima signal na izhodu VCO

obliko

$\omega_{\text{VCO}}(t) = \omega_c + \Delta\omega \sin([\omega_a * t])$ , pri tem je  $\Delta\omega$  majhna v primerjavi s širino resonančne krivulje. Dejansko delamo fizikalni odvod, saj z nosilno frekvenco povemo kje nas frekvenca koleba za majhen  $\Delta\omega$  (na grafu bi to bila x smer). Na izhodu iz resonatorja pa dobimo spremembo amplitude (odvod) (na grafu bi to bila y smer), ko se pomikamo s to majhno frekvenco po resonančni krivulji. Če se nahajamo v resonančnem vrhu bo ta amplituda majhna, saj se v resonanci funkcija za majhne odmike v x smeri ne spremeni veliko v y smeri oziroma z drugimi besedami, tam je odvod nič.

Spremembam te amplitude najraje  $\Delta A$ , glede na kolebanje  $\Delta\omega$  najlažje sledimo s faznim detektorjem, zato signal vodimo na FD in tam opazujemo dogajanje.

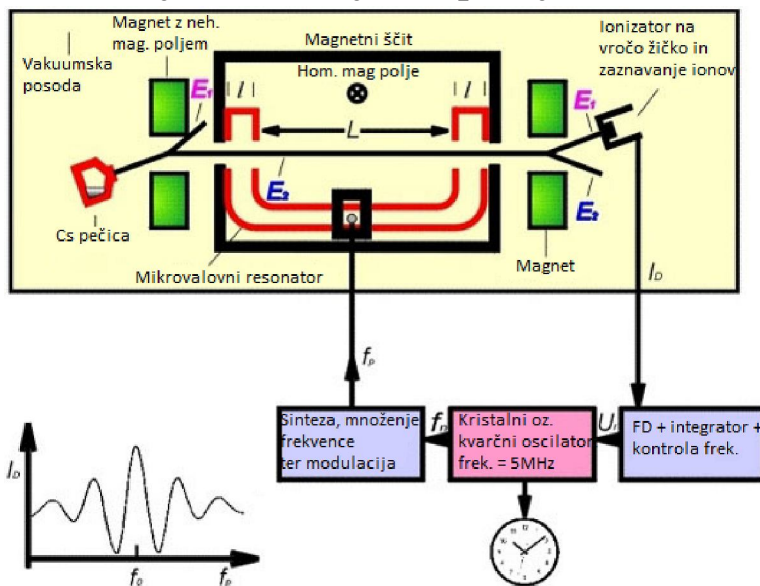
Če želimo, da se bo merilni sistem samodejno vklenil na resonančni vrh, vodimo signal iz FD v napetostno kontroliran oscilator preko regulacijskega vezja, ki bo nastavil frekvenco  $\omega_c$  tako, da bo izhod iz FD čim bolj na ničli.

## 16. Cezijev resonator?

Pri cezijevi uri se modelski oscilator ujame na vrh resonance, ki nastane pri vzbujanju curka cezijevih atomov z mikrovalovi. Ta resonanca je ob skrbni izdelavi resonatorja neodvisna od kateregakoli zunanjega vpliva in izredno natančno ponovljiva, zato je nanjo vezana mednarodna definicija sekunde. Alkalijski atom  $\text{Cs}^{133}$  je v osnovnem stanju duplet z oznako  $2S_{\frac{1}{2}}$ . Okrog zaključenih in delno zasedenih lupin kroži elektron z vrtilno količino 0 in spinom  $\frac{1}{2}$  v stanju 6s.

V šibkem magnetnem polju, ki je manjše od polja jedra, stanja atoma niso več degenerirana, ampak se razcepijo, kjer je med osnovnim in 1. vzbujenim stanjem karakteristična energijska reža  $\Delta E = h * \nu$ , kjer je frekvenca podana do  $s^{-1}$  zelo natančno. Natančnost izvira iz definicije sekunde, ki je vpeta na to energijsko razliko v Cs atomu. Med temi stanji izberemo iz osnovnega in prvega vzbujenega taki dve, ki sta najmanj odvisna od zunanjega mag. polja. V Cs uri se torej vežemo na ta prehod zelo podobno kot pri vklopu na vrh resonance.

Poenostavljena shema je na spodnji sliki.



### Senzorji premikov

Merjenje premikov sodi med osnovna merjenja. Na njem pogosto sloni merjenje drugih fizikalnih količin kot so sila, tlak, temperatura. Načinov merjenja je mnogo, najbolje pa je, če so čim bolj praktični.

17. Uporovni lističi? Kateri parameter je pomemben pri uporovnih lističih? Vezava v Wheatston-ov mostiček?

Pri tem senzorju premikov merimo spremembe upora tanke žice z dolžino  $l$  in presekom  $S$ , ki jo nalepimo na merjenec (še ena relativno podobna izvedba takega senzorja je senzor premikov na potenciometer, ki pa je v goli obliki podvržem veliko merilnim motnjam).

V neobremenjenem stanju je upor žice dan z enačbo:

$$R = \frac{l}{S} \zeta.$$

Ko se žica raztegne ali skrči za  $dl$  imamo:

$$dR = \frac{\zeta}{S} * dl + \frac{l}{S} * d\zeta + \zeta * l * \frac{dS}{S^2}$$

$G = 1 + 2\mu + \frac{d\zeta}{\zeta} \frac{dl}{l}$ , kjer je  $\mu$  Poissonovo število,  $\frac{d\zeta}{\zeta} \frac{dl}{l}$  pa piezoresistivni koeficient, ki je

ponavadi okoli 1, še posebno velik pa je pri polprevodniških merilnih lističih, ki jih uporabljamo za merjenje raztezkov velikostne stopnje  $10^{-7}$ .

Običajen  $G$  je za kovine približno 3.

Povezava med spremembo upora in raztezkom je torej:

$$\frac{dR}{R} = G * \frac{dl}{l}$$

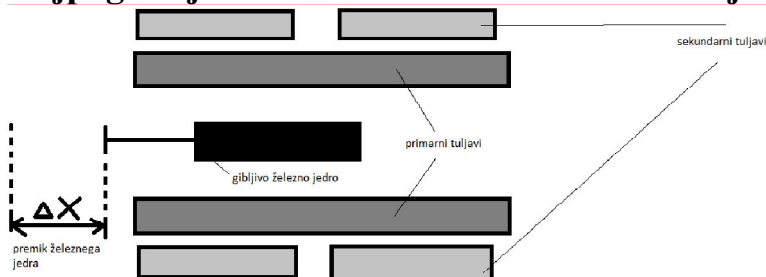
Uporovni listič vežemo v Wheatsonov mostiček in dobimo pri spremembi enega od enakih uporov v mostičku za  $dR$  na izhodu signal  $dU$ :

$$dU = \frac{U_e * dR}{4 * R}, \text{ kjer je } U_e \text{ vzbujevalna napetost.}$$

Pri merjenju moramo paziti na temperaturno kompenzacijo, saj sprememba temperature za nekaj 10 K spremeni relativni upor lističa. Pri zahtevnejših merjenjih uporabljamo tudi FD, ki odpravi še termični šum.

### Senzor premika na induktivni princip

Najpogostejši so diferencialni transformatorji. Shema na spodnji sliki.



**18. Kondenzatorski senzor premikov. Prenosna funkcija? Kako se odzove na  $\delta$ ?**

Kapacitivni senzorji premikov so izjemno občutljivi. Najpreprostejši tak senzor tvori ploščati kondenzator, vezan z izvorom napetosti v RC vezje.

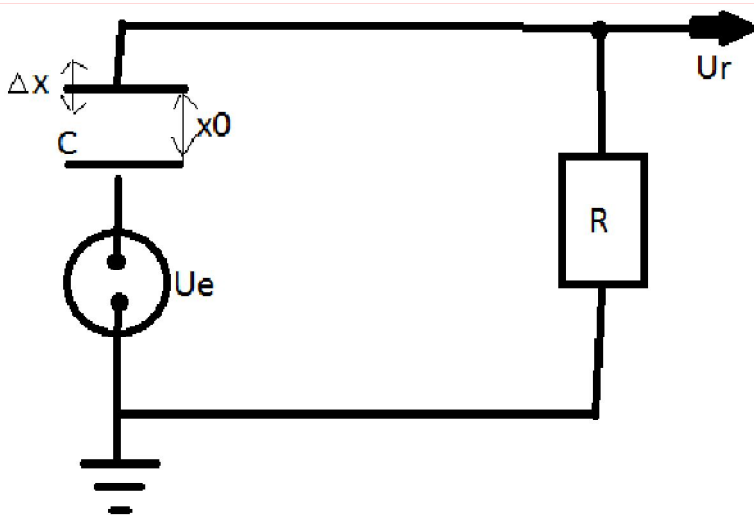
Kapaciteta takega kondenzatorja je:

$$C = \epsilon_0 * \epsilon * \frac{S}{x}$$

Pri majhni spremembi razdalje  $dx$  od začetne razdalje  $x_0$  je sprememba kapacitete:

$dC = -\epsilon_0 * \epsilon * \frac{S}{x_0^2} dx = -C_0 * \frac{dx}{x_0}$ , kar najpogosteje uporabimo pri merjenju majhnih premikov pod  $100 \mu\text{m}$ . Za večje premike vzamemo senzor, pri katerem se spreminja efektivna ploščina plošč  $S$  ali pa uporabimo dielektrično pološčico in jo potiskamo v kondenzator.

Shema vezja je na spodnji sliki.



Vsota padcev napetosti je enaka gonilni napetosti, torej:

$$U_e = U_c + U_r, \text{ oziroma } 0 = \dot{U}_c + \dot{U}_r$$

$$U_r = E_0 * \Delta x = R * I$$

$$I = \frac{d}{dt} U_c * C = C_0 * \frac{dU_c}{dt} + U_c * \frac{dC}{dt}$$

Ker je padec napetosti na uporu  $U_r$  bistveno manjši kot na kondenzatorju imamo kar približno  $U_c \approx U_e$ . Torej je napetost na kondenzatorju "konstantna".  $RC_0 = \tau$

Iz vseh navedenih zakonitosti dobimo sedaj:

$$U_r = R * (-C_0 * \frac{dU_r}{dt} + U_e * \frac{dC}{dt}), \text{ oziroma:}$$

$$\tau \dot{U}_r + U_r = -R U_e * \frac{\epsilon_0 * S}{x_0} * \frac{dx}{x_0 * dt}$$

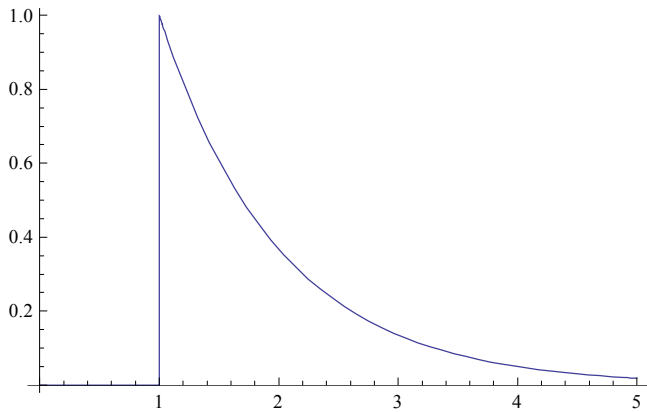
$$(\tau s + 1) * U_r = E_0 * \tau s * x$$

$$\text{Prenosna funkcija torej izgleda takole: } \frac{U_r}{x} = E_0 * \frac{\tau s}{1 + \tau s}$$

Ne smemo iti čez prebojno napetost, zadeva pa ne deluje za počasne premike.

Na delto funkcijo se odzove takole (kar pomeni, da smo za hip zelo odmaknili eno ploščico in jo še isti hip vrnili nazaj na star položaj):





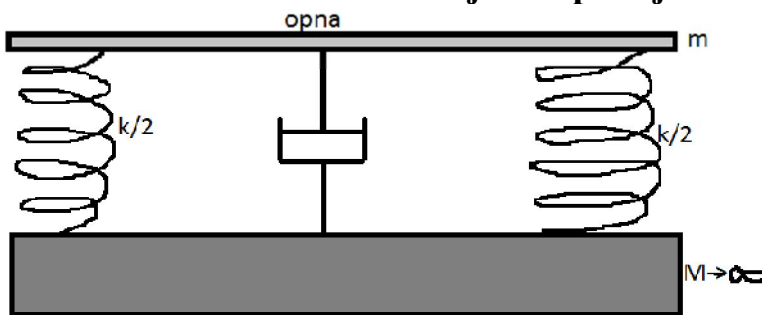
Rešitev je  $e^{-\frac{t}{\tau}}$ , če je delta pri  $t=0$ .

### 19. Odziv kondenzatorskega mikrofona na $\delta$ ? Prenosna funkcija?

Ena različica kondenzatorskega senzorja je kondenzatorski mikrofona.

Tukaj je ena od plošč kondenzatorja tanka opna, ki lovi zvočne valove.

Dinamični model mikrofona je na spodnji sliki.



Zaradi tlačnih sprememb se opna premika ( $M \rightarrow \infty$ , pomeni, da je spodnji del na miru), na sliki na sredini pa imamo še dušilni člen.

Masa  $m$  in koeficient  $k$  določata osnovno frekvenco opne  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Dušenje je optimalno in velja enačba:

$$-kx \quad -\eta\dot{x} + \Delta p S = m\ddot{x}, \quad \text{oziroma}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta p} = k \frac{1}{\omega_0^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + 1}$$

Zanima nas prenosna funkcija  $\frac{U_r}{\Delta p}$

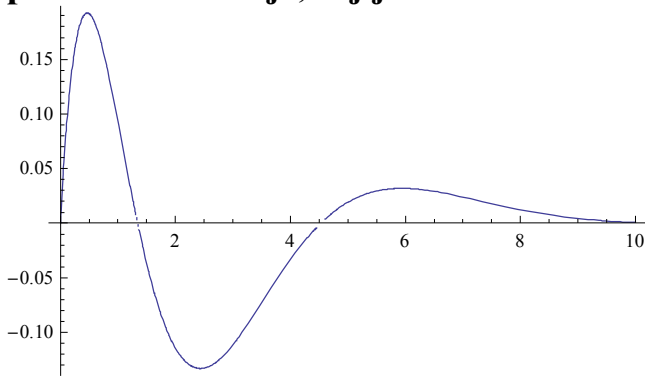
Ker merimo izohdno napetost preko RC člena je  $\frac{U_r}{\Delta x} = E_0 * \frac{\tau s}{1 + \tau s}$

in združeno (še en  $\frac{\tau s}{1 + \tau s}$  pride zaradi Evstahijeve cevi):

$$\frac{U_r}{\Delta p} = k * E_0 * \frac{(\tau s)^2}{(1 + \tau s)^2 * \left( \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + 1 \right)}$$

Odziv mikrofona na delto funkcijo je kar inverzna LaPlaceva transformacija

prenosne funkcije, saj je LaPlaceova transformacija delta funkcije 1.



### Pizdoelektrični senzor

Piezoelektrični senzor je zgrajen tako kot kondenzatorski, le da je kondenzator zapolnjen s piezoelektrikom. Pri spremembi razdalje  $x$  med ploščama se piezoelektrik stisne, kar inducira v kristalu električno polarizacijo  $P$  in posledično naboj na ploščah kondenzatorja. V splošnem sta vektor polarizacije in napetostni tenzor  $T$  v prvem približku linearno povezana preko piezoelektričnega tenzorja  $d$  tretjega reda.

$\vec{P} = d * \underline{T}$ , kjer je  $T$  simetričen tenzor. V obliki vsote lahko to zapišemo:

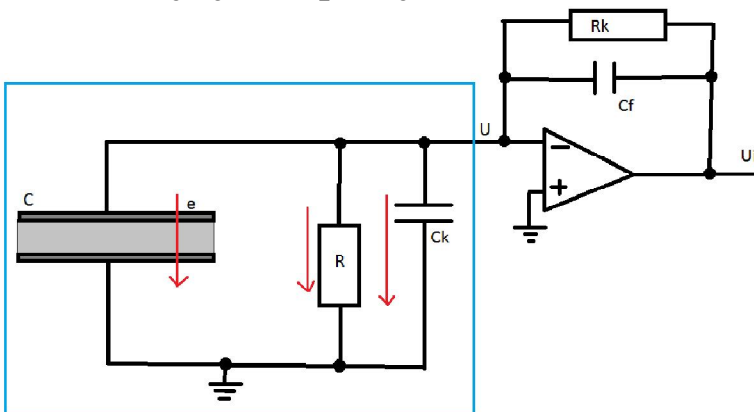
$P_i = \sum_{m=1}^6 d_{im} T_m$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), kjer so  $d_{im}$  dim piezoelektrične konstante. Naboj  $e$ , ki se nabere na ploščah kristala, zaradi deformacije kristala je  $e = PS$  (skalarni produkt  $P$  in  $S$ )

V kondenzatorju postavimo kristal v takšno kristalografsko smer, kjer je piezoelektrična konstanta največja.

Gledamo namreč samo eno smer. Naboj v eni smeri je povezan s piezo. konstanto tako:

$e = d_{33} * F_3$ , kjer je  $F_3$  sila.

Shema vezja je na spodnji sliki.



V modrem je postavitev eksperimenta in sicer:

$$\frac{de}{dt} = I = I_c + I_r + I_{ck} = d_{33} * \frac{dF}{dt} = C * \dot{U} + C_k * \dot{U} + \frac{U}{R}$$

Če označimo s  $\tau = (C + C_k)R$ , dobimo:

$$(\tau s + 1) * U = \frac{\tau d_{33} * s * F}{C + C_k}$$

Sila je s premikom povezana preko Hookovega zakona:  $F/S = E(\Delta x/x_0)$ , dobimo ven prenosno funkcijo za moder okvir:

$$\frac{U}{\Delta x} = K \frac{\tau s}{1 + \tau s}$$

## 20. Kje uporabljamo nabojno občutljiv ojačevalnik?

Ker je  $K$  v gornji enačbi odvisen od kapacitete kabla  $C_k$ , ki jo je v praksi težko nadzirati. Zato Piezo. sensor vežemo na nabojno občutljivi ojačevalnik, katerega izhodna napetost je odvisna od generiranega naboja - vezje na gornji sliki (celotna slika). Vhod v ojačevalnik z zelo veliko vhodno impedanco na sliki je na virtualni ničli, zato se ves naboj nabere na kondenzatorju povratne zanke  $C_f$ :

$$\frac{de}{dt} = C_f * (\dot{U} - \dot{U}_i) + \frac{U - U_i}{R_f}$$

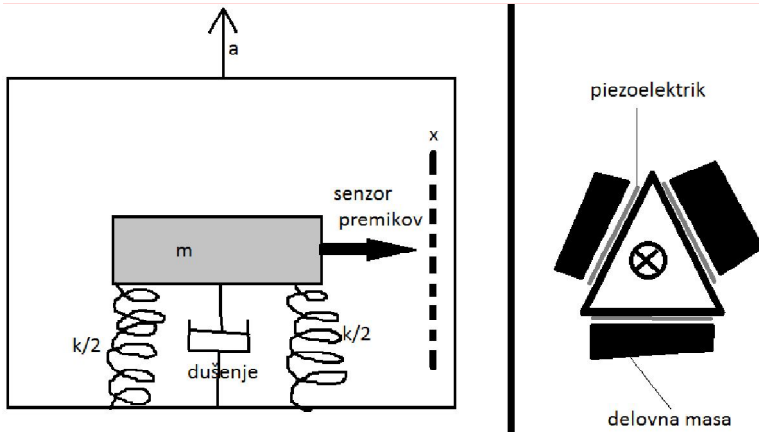
Ven dobimo isto prenosno funkcijo, le da tokrat  $K$  ni odvisen od  $C_k$ .

$$\frac{U}{\Delta x} = K \frac{\tau_f * s}{1 + \tau_f * s} = - \frac{ESd_{33}}{x_0 C_f} \frac{\tau_f * s}{1 + \tau_f * s}$$

Z nabojno občutljivim ojačevalnikom torej zberemo ves naboj iz piezoelektričnega sensorja, saj ojačevalnik prepreči pretakanje naboja skozi kondenzatorja  $C_k$ ,  $C$  in upor  $R$ . Ker kapaciteto  $C_f$  nadziramo in se s časom ne spreminja, uženemo s tem slabo poznavanje upora in kapacitete kablov. Ta ojačevalnik uporabljamo tudi pri detektorjih nabitih delcev.

## 21. Akcelerometri

Najpogosteje uporabljamo piezoelektrične senzorje premikov pri pospeškomerih, kjer je na piezoelektrično ploščico pritrjena utež z maso  $m$ . Delovna shema je prikazana na spodnji sliki levo.



V neinercialnem sistemu je:  
 $m\ddot{x} = -ma - kx - \eta\dot{x}$

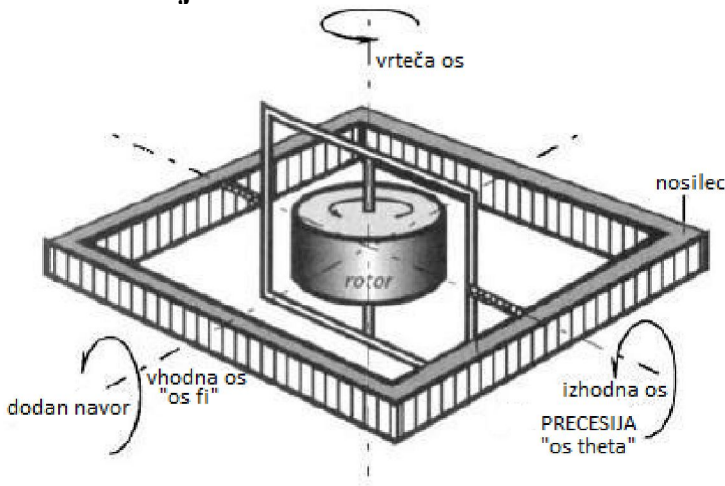
Prenosna funkcija akcelometra je:

$$\frac{x}{a} = \frac{m}{k} * \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + 1}$$

Na desni strani zgornje slike je prikazan akcelometer na strig, strig je ugoden, ker se znebimo temperaturne odvisnosti.

## 22. Merilnik kotne hitrosti? Skica in prenosna funkcija?

Poenostavljena shema:



"Os theta" ima še na vrhu dušilni člen, spodaj pa pritrjeno polžasto vzmet s koeficientom k.

$$M = \frac{d\Gamma}{dt} = J_\vartheta * \ddot{\vartheta} - \Gamma_0 * \dot{\varphi} = -k\vartheta - \eta\dot{\vartheta}$$

Prenosna funkcija je:

$$\frac{\vartheta}{\varphi} = \frac{\Gamma_0}{J_\vartheta} \frac{s}{s^2 + \eta s + k} \quad \text{ali za kotno hitrost:} \quad \frac{\vartheta}{\dot{\varphi}} = \frac{\Gamma_0}{J_\vartheta} \frac{1}{s^2 + \eta s + k}$$

Če damo k na nič (odstranimo vzmet), dobimo integrirajoči žiroskop.

### 23. Prenosna funkcija termometra?

Temperaturne senzorje v prvem približku opišemo s prenosno funkcijo prvega reda:

$$\frac{U_{izh}}{T} = k * \frac{1}{1 + \tau s}, \text{ pri čemer je } T \text{ prava temperatura, } U_{izh} \text{ pa izhodna napetost.}$$

V realnosti je senzor ločen od okolice s tanko steno debeline  $\Delta$ , površino  $S$  in toplotno prevodnostjo  $\lambda$ . Pri natančnejših analizah je potrebno še upoštevati temperaturne gradiente v senzorju in okolici. To storimo z vpeljavo prehodnih plasti med senzorjem in okolico in računamo toplotni tok skozi vse plasti. Račun pokaže, da je pri takem modelu senzorja njegova prenosna funkcija tretjega reda s časovnimi konstantami  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , izjemoma dodamo še prenosni funkciji zakasnilni člen z mrtvim časom  $\tau_m$ . Prenosna funkcija potem zgleda takole:

$$\frac{U_{izh}}{T} = \frac{e^{-\tau_m * s}}{(\tau_1 * s + 1) (\tau_2 * s + 1) (\tau_3 * s + 1)}$$

S starostjo senzorja se spreminjajo tudi njegove dinamične lastnosti, zato je pri natančnih meritvah potrebno umeriti senzor vedno tik pred meritvijo.

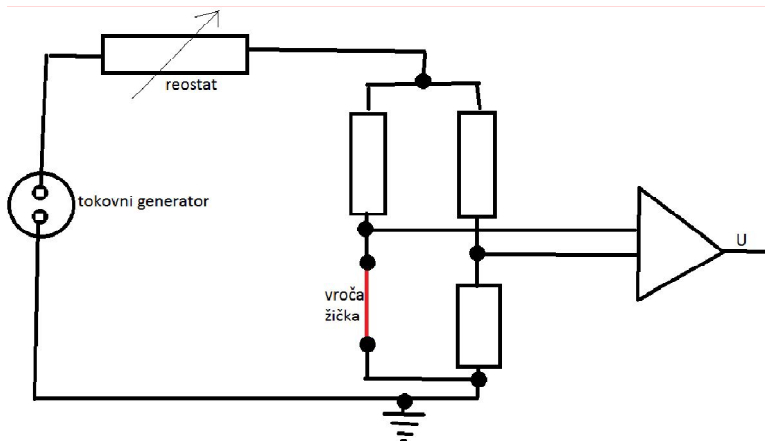
#### Uporovni temperaturni senzorji

Upor se s temperaturo spreminja:

$$\frac{dR}{R} = \alpha * dT$$

### 24. Anemometer na vročo žico? Kaj dela reostat?

Pri anemometrih te vrste uporabljamo zelo tanko vročo žičko, s katero merimo hitrost toka plina. Instrument je v osnovi uporovni termometer. Hlajenje žičke je ob večji hitrosti plina večje in temperatura pade ali pa jo moramo zato bolj segrevati (večji tok), da ohrani konstantno temperaturo. Toplotni tok, ki ga vpihavamo je  $\dot{Q}_0 = l * \Lambda * D * (\Delta T_z)$ , kjer je  $l$  dolžina žičke,  $\Lambda$  konvekcijski koeficient (prenašanje toplote zaradi gibanja snovi),  $D$  premer žičke. Žičko ponavadi vežemo v Wheatsonov most. Shema vezja na spodnji sliki.



Pri merjenju povprečne hitrosti delamo ročno. Z reostatom reguliramo tok skozi žičko, dokler ga ne uravnovesimo in dosežemo prvotno temperaturo žičke.

## 25. Regulacija anemometra na vročo žico?

Radi bi sledili fluktuaciji hitrosti.

Zaradi fluktuacij se spreminja upor žičke.

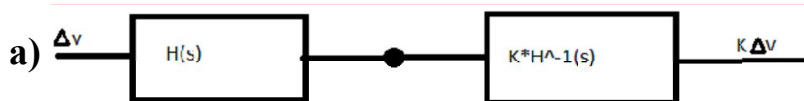
Končna oblika prenosne funkcije je:

$$\frac{\Delta R_{\dot{z}}}{\Delta v} = -\frac{K_v}{1+\tau s}, \text{ v } K_v \text{ smo pospravili konstante, ki so se pokazale pri izpeljavi.}$$

Ponavadi dobimo časovno konstanto velikostnega reda  $10^{-3}$  s. Mi bi radi to pohitrili, saj za proučevanje res trubolentnih fluktuacij potrebujemo frekvence celo do MHz.

Časovno konstanto  $\tau$  lahko učinkovito zmanjšamo na dva načina.

- a) Kompenzacija prenosne funkcije
- b) Vezanje izhoda iz mostička v povratno zanko



Prenosno funkcijo instrumenta kompenziramo s sistemom, ki ga dodamo instrumentu. Ta ima recipročno prenosno funkcijo. Rezultat je ta, da postane merilnik sistem ničtega reda in le pomnoži vhodno količino s konstanto.

Seveda idealne kompenzacije ne moremo doseči, saj ne poznamo prav natančno prenosne funkcije, da je anemometer sistem 1. reda je le bolj ali manj dober približek.

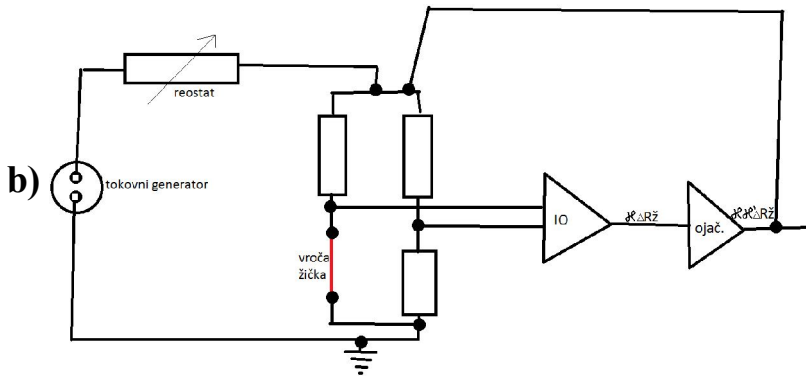
Najpogosteje je pri takih sistemih v uporabi kompenzator s prenosno funkcijo:

$$\frac{1+\tau_1*s}{1+\tau_2*s}$$

in zahtevo, da je  $\tau_1$  čim bolj uglasen na časovno konstanto prvotnega instrumenta,  $\tau_2$  pa čim krajši. To idejo najlažje realiziramo s pasivnim

oziroma aktivnim kompenzacijskim vezjem.

Pot do kompenzacije je takšna, da vezje napajamo s stopničasto se spreminjajočim električnim tokom in ročno poiščemo ustrezno kompenzacijsko časovno konstanto  $\tau_1$ , za katero bo veljalo  $\tau_1 \approx \tau$ .



Zaradi majhnih sprememb upora na žički veljata enačbi:

$$\frac{\Delta R_{\dot{z}}}{\Delta I} = \frac{K_I}{1 + \tau * s} \quad \text{in} \quad \frac{\Delta R_{\dot{z}}}{\Delta v} = \frac{K_v}{1 + \tau * s}$$

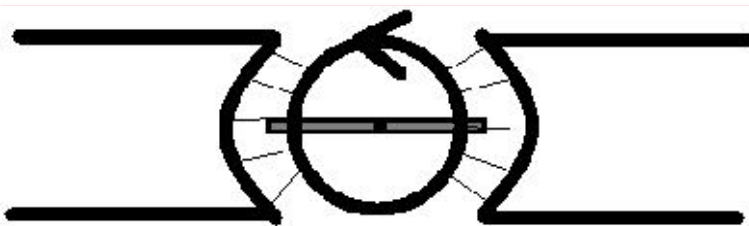
Prenosna funkcija z združenjem obeh in upoštevanja lastnosti vezja dobimo:

$$\frac{\Delta I}{\Delta v} = \frac{K_v}{K_I} * \frac{1}{1 + \tau_{\text{eff}} * s}, \quad \text{kjer smo s } \tau_{\text{eff}} \text{ označili } \tau_{\text{eff}} = \frac{\tau}{1 - k * k' * K_I}$$

Vidimo, da s povratno zanko ne izgubimo pri ojačenju, pridobimo pa na odzivnosti.

Prednost tega sistema je, da se žička ob nenadnem zelo velikem zmanjšanju hitrosti ne prižge, saj sistem sam uravnava njeno temperaturo, tako tudi ni velike nevarnosti, da bi se žička pregrela.

### Senzor pri servoakcelometru



Silnice iz magneta na sliki so pravokotne na krog, po katerem se vrti tuljava.

Z njim lahko merimo odvod pospeška (pomembno pri seizmologiji in tudi pri vlaknih smrti, glede obremenitve na material in obremenitve na človeške kosti).