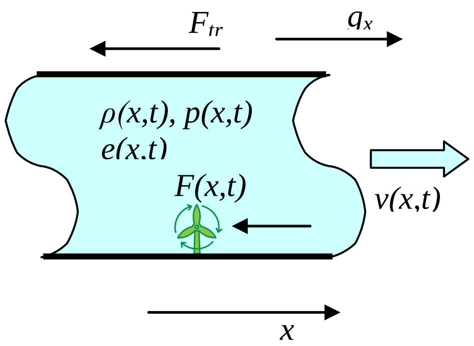
Inženirski povzetek izbranih poglavij termodinamike in mehanike tekočin.

1D **Eulerjeve enačbe** za opis toka stisljive tekočine v cevi so uporaben pripomoček pri analizi termodinamskih sistemov. Z nekaterimi dopolnitvami (stensko trenje, sila teže, izviri oziroma ponori toplote, členi za opis zveznih sprememb preseka cevi) oziroma poenostavitvami, (opustitev krajevnih ali časovnih odvodov) - lahko s temi enačbami opišemo širok spekter pojavov v energetskih sistemih.



Osnovne Eulerjeve enačbe so:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0 \quad \text{kontinuitetna enačba} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x - F - F_{tr} \quad \text{ohranitev gibalne količine} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + p) v}{\partial x} = q + \rho g_x v - Fv \quad \text{ohranitev energije} \quad (3)$$

Spremenljivke: $e = u + v^2/2$, e - specifična polna energija [J/kg], u - specifična notranja energija.

Na desni strani gibalne enačbe je upoštevana komponenta sile teže v smeri x in morebitna zunanja sila F na enoto volumna, ki opravlja ali prejema delo od tekočine (turbina ali črpalka). Sila trenja ob stene cevi F_{tr} spreminja kinetično energijo v notranjo in predstavlja nereverzibilne spremembe. Na desni strani energijske enačbe je upoštevan morebitni izvir ali ponor toplote na enoto volumna q ter moč zunanjih sil. Ireverzibilna sila trenja na polno energijo ne vpliva, saj spreminja kinetično energijo v notranjo.

Na levi strani Eulerjevih enačb so štiri neznanke. Sistem enačb dopolnjuje enačba stanja, v kateri so upoštevani glavni zakoni termodinamike:

$$u = u(p, \rho) \quad (4)$$

Člene na desni strani enačbe pogosto opisujejo empirične korelacije. Nekatere oblike Eulerjevih enačb in empirične korelacije so opisane v primerih in nalogah v nadaljevanju.

ρ - gostota
p - tlak
e - specifična polna energija [J/kg]
u - specifična notranja energija [J/kg]
v - hitrost
g_x - komponenta tež. pospeška v smeri x
F - zunanja sila na enoto volumna [N/m^3]
F_{tr} - sila trenja ob stene cevi [N/m^3]
q - izvir toplote [W/m^3]

Izpeljava 1D Eulerjevih enačb v cevi z zvezno spremenljivim presekom - "po inženirsko"

Za izpeljavo 1D Eulerjevih enačb si zamislimo odsek cevi med x_1 in x_2, skozi katerega se pretaka tekočina in opišemo dogajanje v časovnem intervalu med t_1 in t_2:

$$\int_{x_1}^{x_2} S(x)\rho(x,t_2)dx = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\rho(x,t_1)dx + \int_{t_1}^{t_2} S(x_1)\rho(x_1,t)v(x_1,t)dt - \int_{t_1}^{t_2} S(x_2)\rho(x_2,t)v(x_2,t)dt \quad . \tag{5}$$

Kontinuitetna enačba v integralski obliki pravi, da maso tekočine v odseku ravne cevi med x_1 in x_2 ob času t_2 izračuna tako, da se masi v istem odseku cevi ob času t_1 prišteje maso tekočine, ki je v točkah x_1 in x_2 v časovnem intervalu t_2- t_1 pritekla oziroma odtekla iz opazovanega odseka cevi. Za izpeljavo diferencialne oblike kontinuitetne enačbe, je potrebna predpostavka, da sta gostota in hitrost zvezno odvedljivi funkciji in zato velja

$$S(x)\rho(x,t_2) - S(x)\rho(x,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} S(x)\rho(x,t)dt \qquad \text{in}$$

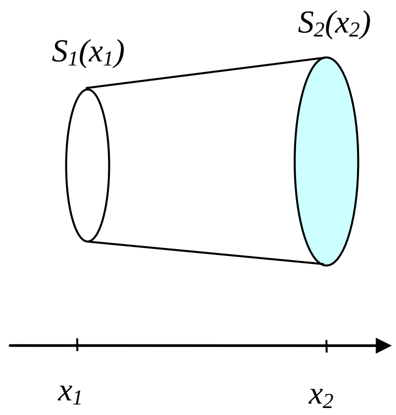
$$S(x_2)\rho(x_2,t)v(x_2,t) - S(x_1)\rho(x_1,t)v(x_1,t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial S(x)\rho(x,t)v(x,t)}{\partial x} dx \tag{6}$$

Z upoštevanjem obeh zapisanih zvez dobimo enačbo:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial S\rho}{\partial t} + \frac{\partial S\rho v}{\partial x} \right] dx\, dt = 0 \tag{7}$$

v kateri vidimo diferencialno obliko kontinuitetne enačbe. Zaradi predpostavk o zveznosti gostote in hitrosti, je integralska oblika kontinuitetne enačbe bolj splošna od diferencialne, slednja pa je pogosto bolj primerna za reševanje.

Cev z zvezno spremenljivim presekom



Na podoben način je mogoče zapisati **integralsko obliko gibalne enačbe**:

$$\int_{x_1}^{x_2} S(x)\rho(x,t_2)v(x,t_2)dx = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\rho(x,t_1)v(x,t_1)dx \quad + \int_{t_1}^{t_2}[\rho(x_1,t)v(x_1,t)]S(x_1)v(x_1,t)dt - \int_{t_1}^{t_2}[\rho(x_2,t)v(x_2,t)]S(x_2)v(x_2,t)dt$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} S(x_1)\,p(x_1,t)dt - \int_{t_1}^{t_2} S(x_2)\,p(x_2,t)dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} p(x)\frac{dS(x)}{dx}dx\,dt \tag{8}$$

kjer pa poleg fluksov gibalne količine, ki v točkah x_1 in x_2 vstopata oz. izstopata iz opazovanega odseka cevi, upoštevamo tudi sili tlaka, ki v točkah x_1 in x_2 spreminjata gibalno količino. Zadnji člen na desni strani gibalne enačbe upošteva silo cevi, ki je posledica spremenljivega preseka cevi in nasprotuje sili tlaka. V enačbi bi na enostaven način lahko upoštevali volumske sile in trenje.

Podobno kot smo preoblikovali integralsko kontinuitetno enačbo, preuredimo še integralsko gibalno enačbo. Dobimo diferencialno obliko gibalne enačbe (brez zunanjih sil, in trenja...)

$$\frac{\partial S\rho v}{\partial t} + \frac{\partial\, S\rho v^2}{\partial\, x} + S\frac{\partial\, p}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

Zapišemo še **integralsko enačbo za polno energijo *e***:

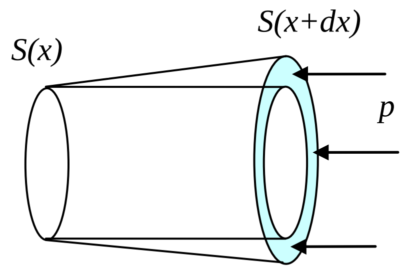
$$\int_{x_1}^{x_2} S(x)\rho(x,t_2)e(x,t_2)dx = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\rho(x,t_1)e(x,t_1)dx \quad + \int_{t_1}^{t_2}[\rho(x_1,t)e(x_1,t)]S(x_1)v(x_1,t)dt - \int_{t_1}^{t_2}[\rho(x_2,t)e(x_2,t)]S(x_2)v(x_2,t)dt$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} S(x_1)\,p(x_1,t)v(x_1,t)dt - \int_{t_1}^{t_2} S(x_2)\,p(x_2,t)v(x_2,t)dt \tag{10}$$

Tudi v energijski enačbi poleg fluksov energije v robnih točkah opazovanega odseka cevi med x_1 in x_2 upoštevamo delo, ki ga v tem času opravi tlak. Stene cevi ne opravljajo dela, zato v enačbi ni člena, ki je zahteval posebno obravnavo v gibalni enačbi. Diferencialna oblika energijske enačbe:

$$\frac{\partial S\rho e}{\partial t} + \frac{\partial S\rho e v}{\partial x} + \frac{\partial\, Spv}{\partial x} = 0 \tag{11}$$

Tudi tu smo v izpeljavi izpustili delo zunanjih sil in izvir oziroma ponor toplote.

Od kod zadnji člen na desni strani integralske oblike gibalne enačbe?



Tlačne sile, ki v cevi spremenljivega preseka delujejo na osenčen kolobar uravnovesi sila stene:

$$-p(S(x+dx)-S(x))$$

Upoštevana je v zadnjem členu na desni strani gibalne enačbe.

Naloga 1: izpelji 3D Eulerjeve enačbe tako, kot jih izpeljejo fiziki:
1a) kontinuitetna enačba:
Sprememba mase v volumnu V na časovno enoto, je enaka pretoku skozi površino S, ki objema volumen V:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} \qquad (12)$$

integral po površini prevedemo v integral po volumnu (predpostavimo da sta gostota in hitrost zvezno odvedljivi funkciji po prostoru) in dobimo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\int_V \nabla\cdot(\rho\vec{v})dV \quad . \qquad (13)$$

Če predpostavimo zveznost gostote po času, zamenjamo vrstni red integracije po volumnu in odvajanja po času, ter opustimo integrale, dobimo kontinuitetno enačbo

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (14)$$

1b) gibalna enačba:
Sprememba *i*-te komponente vektorja gibalne količine v volumnu *V* na časovno enoto, je posledica fluksa gibalne količine skozi površino *S*, ki objema volumen *V* (prvi člen na desni) in sil, ki delujejo na volumen *V* v smeri *i* (tlačne sile na površini *S* in sila teže po volumnu *V*):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho v_i dV = -\oint_S \rho v_i\vec{v}\cdot d\vec{S} - \oint_S p\vec{i}\, d\vec{S} + \int_V \rho\vec{g}_i dV \qquad (15)$$

Predpostavimo neviskozno tekočino. Spet predpostavimo zveznost gostote, hitrosti in tlaka ter integral po površini prevedemo v integral po volumnu:

$\frac{\partial\rho v_i}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v_i\vec{v}) + (\nabla p)_i = \rho\vec{g}_i$ oziroma v vektorski obliki: $\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}\otimes\vec{v}) + \nabla p = \rho\vec{g}$ (16)

Gaussova formula - za vektorsko in skalarno polje:

$$\oint_S \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{f}\; dV$$

$$\oint_S f\, d\vec{S} = \int_V \nabla f\; dV$$

Diadni ali tenzorski produkt vektorjev v kartezičnem koordinatnem sistemu:

$$\vec{f}\otimes\vec{g} = \begin{vmatrix} f_1g_1 & f_1g_2 & f_1g_3 \\ f_2g_1 & f_2g_2 & f_2g_3 \\ f_3g_1 & f_3g_2 & f_3g_3 \end{vmatrix}$$

kjer $\vec{v}\otimes\vec{v}$ predstavlja diadni ali tenzorski produkt.

Če bi v izpeljavi upoštevali tudi sile, ki so posledica viskoznosti, bi dobili Navier-Stokesovo enačbo - osnovno enačbo mehanike tekočin:

$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v}\otimes\vec{v})+\nabla p-\nabla\cdot\underline{\tau}=0\,, \tag{17}$$

kjer je $\underline{\tau}$ tenzor strižnih napetosti, ki presega obseg teh zapiskov.

1c) energijska enačba:

Sprememba polne energije v volumnu *V* na časovno enoto, je enaka fluksu energije skozi površino *S*, ki objema volumen *V* (prvi člen na desni) in delu, ki ga opravijo zunanje sile, ki delujejo na volumen *V* v časovni enoti (tlačne sile na površini *S* in sila teže po volumnu *V*):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho e dV=-\oint_S \rho e\vec{v}\cdot d\vec{S}-\oint_S p\vec{v}\cdot d\vec{S}+\int_V \rho\vec{g}\cdot\vec{v}dV \tag{18}$$

Predpostavimo tekočino z ničelno toplotno prevodnostjo. Integral po površini prevedemo v integral po volumnu, spet predpostavimo zveznost gostote, hitrosti, specifične notranje energije in tlaka, ter dobimo:

$$\frac{\partial\rho e}{\partial t}+\nabla\cdot((\rho e+p)\vec{v})-\rho\vec{g}\cdot\vec{v}=0 \tag{19}$$

Če bi v energijski enačbi upoštevali tudi toplotne tokove, ki so posledica prevajanja toplote, ter delo viskoznih sil na robu opazovanega volumna, bi dobili bolj popolno energijsko enačbo, katere uporab presega obseg teh zapiskov:

$$\frac{\partial\rho e}{\partial t}+\nabla\cdot((\rho e+p)\vec{v})-\rho\vec{g}\cdot\vec{v}+\nabla\cdot\vec{j}+\nabla\cdot(\underline{\tau}\cdot\vec{v})=0 \tag{20}$$

Tenzor strižnih napetosti v Newtonski tekočini (glej npr. Podgornik, mehanika kontinuumov)

$$\underline{\tau}=2\mu\left(\frac{1}{2}\nabla\vec{v}+\frac{1}{2}(\nabla\vec{v})^T\right)+\left(\mu''-\frac{2\mu}{3}\right)\nabla\cdot\vec{v}\,\underline{I}$$

Newtonska tekočina - tekočina v kateri so strižne napetosti sorazmerne z gradienti strižnih hitrosti

μ - dinamična viskoznost pogosto samo "viskoznost" [Pa s]

$\nu=\mu/\rho$ - kinematična viskoznost [m^2/s]

μ'' - "druga viskoznost" - pomembna le pri pojavih, kjer igra vlogo stisljivost tekočine

---

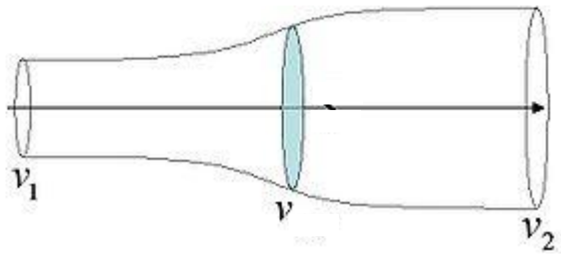
Običajno velja Fourierov zakon za prevajanje toplote:

$$\vec{j}=-\lambda\nabla T$$

Naloga 2: 1D gibalno enačbo preoblikuj v neohranitveno obliko - rezultat (brez členov, ki opisujejo zunanje sile):

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{21}$$

Naloga 3 - Betzova limita: Iz 1D Eulerjevih enačb za cev z zvezno spreminjajočim se presekom, izpelji Betzovo limito - maksimalno moč, ki jo iz vetra, ki piha s hitrostjo v_1 lahko dobi vetrna turbina. Predpostavi nestisljiv, izotermen, stacionaren tok skozi cev na sliki. Vetrnica se nahaja v delu "cevi s spremenljivim presekom". Predpostavi enak tlak v vstopnem in izstopnem delu cevi s konstantni presekom S_1 in S_2 ter tok brez trenja. Eulerjeve enačbe za 1D tok v cevi z zvezno spremenljivim presekom so:



$$\frac{\partial S\rho}{\partial t} + \frac{\partial S\rho v}{\partial x} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial S\rho v}{\partial t} + \frac{\partial S\rho v^2}{\partial x} + S\frac{\partial p}{\partial x} = -SF \tag{23}$$

$$\frac{\partial S\rho e}{\partial t} + \frac{\partial S\rho e v}{\partial x} + \frac{\partial Spv}{\partial x} = -SF\,v, \tag{24}$$

kjer je presek $S(x)$ (ki ga ne smemo pomešati s specifično entropijo označeno z "s") in F sila na enoto volumna, ki zaustavlja ali pospešuje tok tekočine. V primeru vetrnice sila F deluje na delu cevi s spremenljivim presekom. Člen SFv v energijski enačbi je moč na enoto dolžine, ki jo porablja vetrnica. Kljub temu, da ne poznamo porazdelitve sile F in preseka S v odvisnosti od koordinate x, lahko opravimo enostaven račun. Enačbe za stacionaren, izotermen in nestisljiv tok :

$$Sv = Const. \qquad \frac{\partial S\rho v^2}{\partial x} + S\frac{\partial p}{\partial x} = -SF \qquad \frac{\partial S\rho v(v^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial Spv}{\partial x} = -SF\,v \tag{25}$$

Integriraj zadnji enačbi po odseku cevi na katerega vpliva vetrnica (odsek med točkama 1 in 2 v katerem se spreminja tlak in hitrost). Njegova natančna dolžina ni znana, a za naš račun ni pomembna. Pred vetrnico in za vetrnico predpostavi tok v cevi s konstantnim presekom in tok pri konstantnem tlaku. Integrirane enačbe:

$$Sv\rho(v_2 - v_1) = P/v \qquad Sv\rho(\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2) = P \qquad (26)$$

kjer je moč vetrnice

$$P = -\int_1^2 S(x)F(x)v(x)dx = -Sv\int_1^2 F(x)dx \quad .$$

Moč v energijski in gibalni enačbi izenačiš

$$Sv\rho(v_2 - v_1) = S\rho(\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2)$$

in dobiš rezultat, ki pravi, da je povprečna hitrost vetra v opazovanem odseku "cevi z vetrnico"

$$v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\,.$$

Rezultat upoštevaj v energijski enačbi:

$$P = Sv\rho(\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2) = S\rho v^2(v_2 - v_1)$$

Izrazi izstopno hitrost v_2 s hitrostjo zraka skozi vetrnico v:

$$P = 2S\rho v^2(v - v_1)$$

Poiščeš hitrost zraka skozi vetrnico v, pri kateri bo moč maksimalna pri dani vstopni hitrosti v_1 (odvajaj moč po v). Maksimum je pri

$$3v = 2v_1$$

in maksimalna moč vetrnice je

$$P = \frac{8}{27}S\rho v_1^3$$

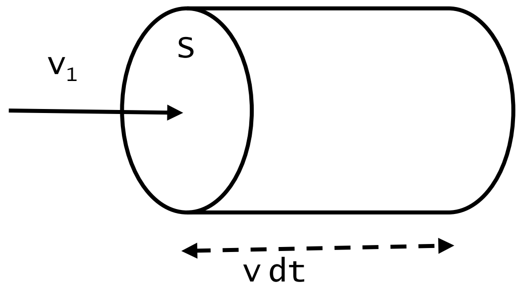
S predavanj je znano, da je moč vetra skozi valj s presekom vetrnice S enaka:

$$P_{veter} = \frac{1}{2}S\rho v_1{}^3$$

Betzova limita:

$$P = \frac{16}{27}P_{veter}$$

Moč vetra, ki s hitrostjo v piha skozi površino s presekom S



$$P_{veter} = \frac{1}{2}S\rho v_1{}^3$$

Betzova limita:
Idealna vetrnica lahko izkoristi 16/27 (~59%) moči vetra.

Realne vetrnice pretvorijo v energijo ~40% moči vetra.

Naloga 4: I**zpelji enačbo za transport kinetične energije.** Navodilo - pomnoži gibalno enačbo s hitrostjo *v* in preuredi. Rezultat:

$$\frac{\partial\, \rho v^2/2}{\partial\, t} + \frac{\partial\; \rho v^3/2}{\partial\, x} + v\frac{\partial\, p}{\partial x} = \rho g_x v - Fv - F_{tr} v \qquad (27)$$

Naloga 5: Zapiši enačbo za transport notranje energije u. Navodilo - od enačbe za polno energijo odštej enačbo za kinetično energijo iz prejšnje naloge. Rezultat:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial x} = q + F_{tr} v \qquad (28)$$

Naloga 6: Zapiši enačbo za transport entalpije *h* v stacionarnem stanju in pokaži, da se pri Joules-Kelvinovem poskusu ("Toplota", str. 51) ohranja entalpija. V enačbi za notranjo energijo upoštevamo $h=u+p/\rho$. Rezultat:

$$\frac{\partial \rho h v}{\partial x} - v\frac{\partial p}{\partial x} = q + F_{tr} v \qquad (29)$$

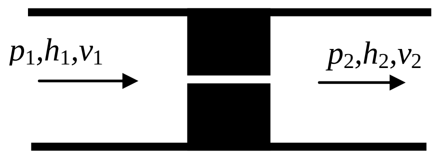
V Joules-Kelvinovem poskusu je kinetična energija toka majhna, zato velja gibalna enačba v obliki:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -F_{tr} \qquad (30)$$

Cev je izolirana in je q=0. Rezultat - ohranitev entalpije:

$$\rho h v = Const \qquad (31)$$

Joules-Kelvinov poskus.

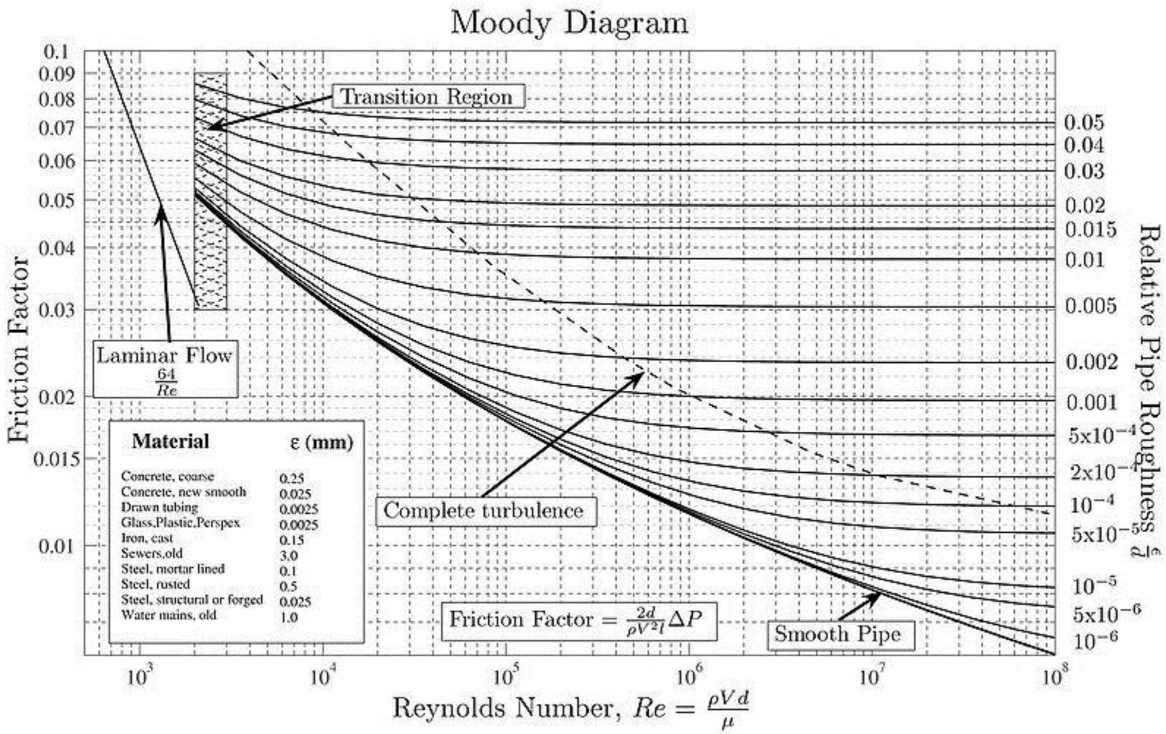


Trenje v zaslonki je znatno.
Cev je izolirana.
Kinetična energija toka pred in za zaslonko je zanemarljiva:

$$v_1 \approx v_2 \approx 0\,,\;\; p_1 > p_2$$

Naloga 7: Izračunaj padec tlaka pri pretakanju vode s temperaturo 20 °C skozi 100 m dolgo gladko cev s premerom 10 cm in hitrostjo toka 1 m/s. Upoštevaj trenje vode z viskoznostjo 0.001 Pa.s. Silo trenja (na enoto volumna) izračunamo po empirični enačbi:

$$F_{tr} = f_w \frac{\rho v|v|}{2D}$$ kjer je f_w koeficient stenskega trenja (friction factor - slika) (32)



V laminarnem toku (Re<2000) je njegova vrednost (analitičen rezultat - Fizika I):

$$f_w = \frac{64}{\text{Re}}, \tag{33}$$

v turbulentnem toku (Re>5000) pa:

$$\frac{1}{\sqrt{f_w}} = -2\log_{10}\left(\frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f_w}} + 0.27\frac{\varepsilon}{D}\right), \tag{34}$$

kjer je relativna ε/D hrapavost cevi (desna ordinatna os).

Pri Reynoldsovih številih 2000<Re<5000 se koeficient stenskega trenja določi z interpolacijo. Namesto računanja, koeficient pogosto odčitamo kar iz priloženega grafa.

Rezultat: $\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$ =100000, f_w=0.018 in F_{tr} =90 N/m^3

Iz gibalne enačbe sledi:

$$\Delta p = F_{tr}\Delta x = 9000 \text{ Pa}$$

Naloga 8: Izračunaj tlačni padec pri pretakanju primarne vode skozi sredico elektrarne Krško. Masni tok skozi vsako vejo primarnega sistema je 4770 kg/s. Sredico sestavlja 121 gorivnih elementov, vsak gorivni element je dolg 3.66 m. V gorivnem elementu je 235 gorivnih palic, 20 vodil regulacijskih palic in 1 vodilo instrumentacije. Vse imajo premer 0.95 cm, razdalja med osmi sosednjih palic je 1.23 cm, hladilo pa se pretaka le z zunanje strani. Gostota vode pri obratovalnem tlaku v sredici 156 bar in povprečni temperaturi vode 310 ^{o}C (zanemarimo dvig temperature v sredici) je 710 kg/m^3. Viskoznost vode pri teh pogojih je 8.5*10^{-5} Pa.s.
Iz gibalne enačbe zapisane za stacionarno stanje in tok s konstantno gostoto sledi:

Sila trenja - voda teče skozi prostor med gorivnimi elementi - cilindri. Okoli vsakega cilindra je presek "kanala" za pretok hladila

$$1.23^2 - \pi 0.95^2 / 4 \approx 0.804 cm^2$$

Presek celotne sredice za pretok hladila: 121*256*0.804 cm^2 = 2.5 m^2

Hitrost vode skozi sredico: 5.4 m/s

Hidravlični premer D_e, ki se uporablja pri računanju Reynoldsovega števila in sile trenja za poljubno geometrijo, se izračuna kot

D_e=*4S/o* = (4*ploščina kanala)/(omočeni obseg kanala)= 4*0.804/(2*π*0.475) = 1.08 cm

Reynoldsovo število vode v sredici: Re=486000~500000

Koeficient stenskega trenja za gladko cev: f_w=0.014, za rahlo hrapavo cev ε/D=0.0001: f_w=0.015 (Moody-jev diagram - Naloga 7)

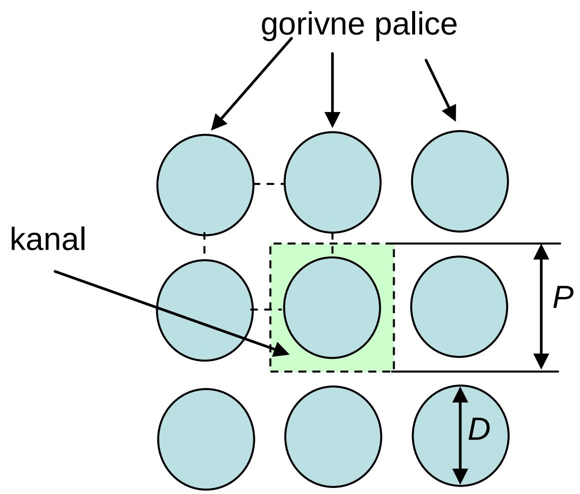
$$\Delta p = |F_{tr}| \Delta x = f_w \frac{\rho v |v|}{2D} \Delta x \approx 0.5 \quad bar$$

tlačni padec zaradi trenja je v resnici ~0.2-0.3 bar večji zaradi distančnih rešetk, ki povezujejo gorivne palice v gorivnem elementu. Prištejemo še $\rho g \Delta x$~0.26 bar hidrostatičnega tlaka. Tlačna razlika med spodnjim in zgornjim robom sredice je ~1 bar.

Hidravlični premer kanala:

D_e=*4S/o*

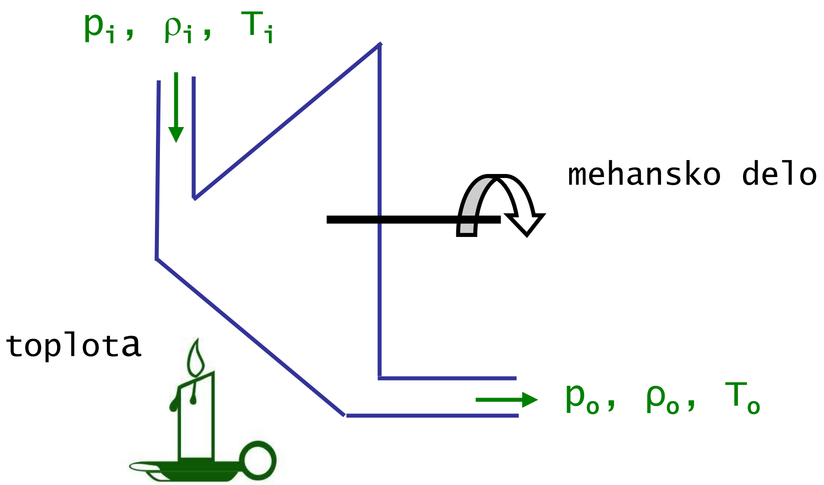
$$D_e = \frac{(4\text{*ploščina kanala})}{(\text{omočeni obseg kanala})}$$



Kanal v sredici reaktorja

$D_e=(P^2-\pi D^2/4)/(\pi D)$

Naloga 9: V 1D stroj vstopa tekočina z entalpijo h_i in izstopa tekočina z entalpijo h_o. Stroj deluje stacionarno ($S\rho v = \dot{m} = Const$). Na osnovi Eulerjeve enačbe za polno energijo zapiši relacijo med vstopno in izstopno entalpijo.



specifična entalpija: $\rho h = \rho u + p$,

energijska enačba: $$\frac{\partial\, S(\rho e + p)v}{\partial x} = \frac{\partial\, S\rho v(h + v^2/2)}{\partial x} = Sq + S\rho g_x v - SFv$$

integral energijske enačbe po dolžini stroja:

$$\dot{m}(h_o - h_i) = -\dot{m}\frac{(v_o^2 - v_i^2)}{2} + P_Q - P_A - P_g \qquad (35)$$

Sprememba entalpije v časovni enoti je sestavljena iz prispevkov:

1) spremembe specifične kinetične energije na časovno enoto: $\dot{m}\frac{(v_o^2 - v_i^2)}{2}$

2) toplotne moči, ki jo je v stroju prejema ali oddaja tekočina: $P_Q = \int_i^o Sq dx$,

3) mehanske moči, ki jo opravi stroj ali tekočina: $P_A = \int_i^o SFv dx$

4) ter moči volumskih sil - v obravnavanem primeru gravitacije:

$P_g = \int_i^o S\rho v g_x dx = \dot{m}\int_i^o g_x dx = \dot{m}g(z_o - z_i)$,

kjer z meri samo vertikalno razliko med vhodom in izhodom.

Posebni primeri:

- stroj je turbina (tekočina je opravila delo kar je zmanjšalo njeno entalpijo, q~0, Δz~0) :

$$P_A = \dot{m}\left(h_o - h_i + \frac{(v_o^2 - v_i^2)}{2}\right)$$

- stroj je črpalka (podobno kot turbina, le da je tekočina delo prejela q~0, Δz~0)

- reaktorska sredica, uparjalnik (tekočina je prejela toploto, delo w~0)

- kondenzator (tekočina je toploto oddala w~0)

- "stroj" je cev (q~0, w~0) : Bernoullijeva enačba:

$$(h_o - h_i) = \frac{(v_o^2 - v_i^2)}{2} + g(z_o - z_i) \qquad (36)$$

Naloga 10: Izračunaj pretok skozi sistem, kjer črpalka z mehansko močjo P vzdržuje stacionaren volumski tok Φ in kompenzira tlačne izgube Δp.

Iz Eulerjeve enačbe za ohranitev gibalne količine celotnem sistemu in v stacionarnem stanju sledi $F_{črp} = F_{tr}$. Iz nalog 7 in 8 poznamo $F_{tr} = \Delta p / L$, kjer je L dolžina tokovne poti v sistemu.

Eulerjeva energijska enačba - gostota moči črpalke je $F_{črp} v$, kjer je v= Φ/S hitrost tekočine v sistemu in je S presek sistema.

Moč črpalke $P = (F_{črp} v) * S * L = \Delta p \Phi$ (volumen sistema je $L*S$).

Naloga 11: Reaktor JE Krško ima moč 2000 MW. Primarna voda vstopa v sredico s temperaturo 287 ^oC in z masnim tokom 9500 kg/s. Tlak v sredici je 15.6 MPa. Kakšna je temperatura vode na izhodu iz sredice?

Iz parnih tabel sledi h_i=1270 kJ/kg

$\dot{m}(h_o - h_i) = P$ h_o=1480 kJ/kg , iz parnih tabel sledi T_o=324 ^oC

Ali:

$T_o = T_i + P/(c_p \dot{m})$

Kjer c_p=5700 J/KgK odčitamo iz tabel pri T=310^{o}C in p=15.6 MPa (tabele, ki opisujejo samo stanje nasičenja tu niso preveč uporabne). Spet sledi T_o=324 ^{o}C.
Velja opozoriti, da se c_p na temperaturnem intervalu 287 ^{o}C do 337 ^{o}C poveča od 5180 na 6500 J/kgK. Gostota vode se na istem intervalu zmanjša od 752 na 661 kg/m^3.

Naloga 11a: Reaktor JE Krško ima 235 palic gorivnih v vsakem od 121 elementov. V elementu je še 20 cevi za kontrolne palice in ena cev za instrumentacijo. Premer gorivne palice je $2r_P$=0.95 cm, razdalja med osema sosednjih palic pa D=1.232cm. Gorivne palice so dolge H=3.66m, debelina cirkonijeve srajčke je δ=0.0527cm, toplotne prevodnosti $\lambda_{srajčke}$=20 W/(mK), λ_{UO2}=3W/(mK). Faktor vročega kanala je $F_{\Delta H}$=1.59. Kolikšna je temperatura hladila na izhodu iz najbolj vročega gorivnega elementa?

Moč povprečne gorivne palice P_{pp}= *2 GW /* (121*235)=70 kW

Moč najbolj v vročem kanalu $P_{\Delta H}=P_{pp}F_{\Delta H}$=112 kW
Prirastek specifične entalpije v vročem kanalu (ob predpostavki, da ni interakcije s sosednjimi - hladnejšimi kanali) je:

$\Delta h_{vroči\text{-}kanal} = P_{pp} / (121 * 256\, \dot{m}) = 365$ kJ/kg

Izstopna entalpija je 1632 J/kgK, pri tlaku 15.6 MPa to pomeni temperaturo 345 ^{0}C (glej tabele za enofazno stanje). Iz tabel v stanju nasičenja ugotovimo, da je to približno temperatura vrelišča pri 15.6 MPa.

D - razdalja med osema sosednjih gorivnih palic - stranica kanala
r_P - polmer gorivne palice
r_g - polmer gorivne tabletke (je v nalogi 11 enak notranjemu radiju srajčke gorivne palice)
H - dolžina gorivne palice
P - moč gorivne palice
P_{pp} - moč povprečne gorivne palice
$F_{\Delta H}$ - Faktor vročega kanala - maksimalna dopustna vrednost je 1.59. Dejanski faktorji vročega kanala so ~1.3-1.4.
$P_{\Delta H}$ - moč gorivne palice v vročem kanalu

Toplotna prevodnost goriva (UO_2) se s temperaturo znatno spreminja:

600K	5 W/m/K
1200K	3 W/m/K
1800-2200K	2 W/m/K

Z izgorevanjem goriva se prevodnost zmanjša za 10-20%.

Naloga 11b: Izračunaj toplotno prestopnost med gorivnim elementom in hladilom po empirični korelaciji (Weisman, "Heat transfer to water flowing parallel to tube bundles", Nuc. Sci & Eng. 6 (78), 1979)

$$h = \frac{\lambda}{D_e} Nu \qquad Nu = (0.042\frac{D}{2r_p} - 0.024)\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{(1/3)}$$

Iz podatkov λ_{VODA}=0.54W/mK, Re=500000 (glej nalogo 8), D_e=1.08 cm (naloga 8), $\mathrm{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ =0.9 (parne tabele) sledi

Nu=1040 in h=52000 W/m^{2}K

Naloga 11c: Izračunaj toplotni tok ki teče v radialni smeri s površine gorivne palice v vročem kanalu na hladilo in temperaturno razliko med površino palice in povprečno temperaturo hladila v kanalu, če predpostaviš, da se moč po višini kanala ne spreminja.

$j = P_{\Delta H} / S$ = 112 kW / ($H\, 2\pi\, r_d$) = 1,0 MW/m^2

$j = h\ (T_{srajčka} - T_{hladilo})$ in ΔT = 20 K

Naloga 11d: Izračunaj temperaturne profile po višini vročega kanala v: hladilu, srajčki in v osi gorivne palice. Aksialno porazdelitev moči aproksimiramo s funkcijo:

$$q(z) = \frac{P_{\max}}{HS_{gorivo}}(0.3 + 0.7.\cos(\pi z/\mathrm{H}))\,, \quad H\text{=3.66 m} \quad z[-H/2, H/2]$$

Najprej določimo vrednost P_{max} - maksimalno lokalno moč v vročem kanalu:

$$P_{\Delta H} = S_{gorivo}\int_{-H/2}^{H/2} q(z)dz = (0.7\frac{2}{\pi} + 0.3)P_{\max} \qquad P_{\max} = P_{\Delta H} / 0.746 = 150\text{ kW}$$

(povprečna moč palice v vročem kanalu $P_{\Delta H}$ je izračunana v 11a)
Odsek gorivnega elementa dz v času dt generira toploto:

$$q(z)S_{gorivo}dzdt$$

h - toplotna prestopnost - POZOR - ne zamešaj s specifično entalpijo
Nu - Nusseltovo število - brezdimenzijska toplotna prestopnost
D - razdalja med osema sosednjih gorivnih palic - stranica kanala
r_P - polmer gorivne palice
r_g - polmer gorivne tabletke (je v nalogi 11 enak notranjemu radiju srajčke gorivne palice)
Re - Reynoldsovo število v kanalu sredice
Pr - Prandtlovo število - brezdimenzijsko razmerje med difuzivnostjo gibalne količine in difuzivnostjo toplote
D_e - efektivni premer kanala

$$D_e = 4 \cdot (presek\ kanala)/(omoceni\ obod\ kanala)$$

$T_{hladilo}$ - po preseku kanala povprečena temperatura hladila:

$$T_{hladilo} = \frac{\int \rho c_p v T dS_{kanal}}{\int \rho c_p v dS_{kanal}}$$

j - toplotni tok [W/m^2]
q - gostota toplotne moči [W/m^3] v UO_2
S_{gorivo} - presek gorivne tabletke πr_g^2
S_{palica} - presek gorivne palice πr_p^2

To toploto prek površine $S_{palica}dz$ prevzame "odsek hladila", ki je v času dt s povprečno hitrostjo v potoval mimo opazovanega odseka gorivne palice $dz = v\,dt$:

$$\rho_{hladilo} S_{kanal} (v dt) c_p\, dT \quad .$$

Obe energiji izenačimo in zapišemo diferencialno enačbo za temperaturo:

$$\rho_{hladilo} S_{kanal} v\, c_p\, dT = q(z)\, S_{gorivo} dz$$

Gostota in hitrost sta sicer odvisni od temperature a je masni tok $\rho_{hladilo} S_{kanal} v$ v kanalu konstanten. Če napravimo dokaj grobo aproksimacijo in zapišemo, da je specifična toplota konstanta, enačbo enostavno integriramo in dobimo aksialni temperaturni profil v hladilu:

$$T_{hladilo}(z) = T_{in} + \frac{P_{\max}}{\rho_{hladilo} v S_{kanal}\, c_p H}\left[0.3\left(z + \frac{H}{2}\right) + \frac{0.7H}{\pi}\left(\sin\frac{\pi z}{H} + 1\right)\right]$$

Slika s temperaturnim profilom hladila, je narisana z vrednostjo c_p=6200 J/kgK. Specifična toplota začne v bližini nasičenja hitro rasti s temperaturo.
Aksialni temperaturni profil na površini gorivne palice dobimo iz zveze med toplotnim tokom na površini gorivne palice in gostoto moči gorivne palice

$$j(z) = \frac{q(z)\pi r_g^2 dz}{2\pi r_p dz} = \frac{q(z) r_g^2}{2 r_p}$$

ter iz enačbe, ki opisuje radialni prenos toplote s srajčke na hladilo

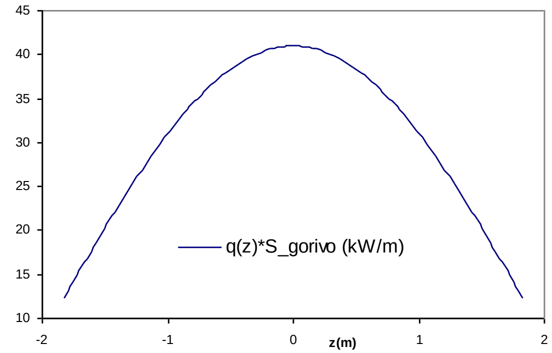
$$j(z) = h(T_{srajcke}(z) - T_{hladilo}(z)) \quad .$$

Temperaturni profil na zunanji strani srajčke gorivnega elementa je

$$T_{srajcke}(z) = \frac{j(z)}{h} + T_{hladilo}(z) = \frac{q(z) r_g^2}{2 r_p h} + T_{hladilo}(z) \quad ,$$

pri čemer smo toplotno prestopnost h obravnavali kot konstantno vzdolž kanala, v bolj natančnem (numeričnem) računu, pa bi morali upoštevati tudi spremembe toplotne prestopnosti v aksialni smeri.

Porazdelitev gostote toplotne moči po višini



Ločena obravnava prenosa toplote v aksialni (z) in radialni (r) smeri je mogoča le v vodno hlajenih reaktorjih, kjer je prevajanje toplote v aksialni smeri zanemarljivo.

V reaktorjih hlajenih s tekočo kovino, bi bilo potrebno upoštevati tudi difuzijo toplote v aksialni smeri.

S Poissonovo enačbo lahko izračunamo **radialno toplotno prevajanje** skozi srajčko in radialni toplotni profil znotraj srajčke in tudi znotraj sredice gorivnega elementa. Pri tem lahko v vodno hlajenem reaktorju zanemarimo prevajanje v aksialni smeri, saj so gradienti temperature v smeri z precej manjši od radialnih gradientov:

srajčka: $\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$ gorivo: $\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -q(z)$ kjer je r_g radij gorivne tabletke.

Za temperaturo v srajčki kot robne pogoje poznamo temperaturo in toplotni tok na zunanji steni srajčke:

$$T_{srajcka}(r_p) \qquad \text{ter} \qquad j(r_p) = -\lambda_{srajcka}\frac{dT}{dr}(r_p) = \frac{q(z)S_{gorivo}dz}{2\pi r_p dz}$$

Z dvakratno integracijo in upoštevanjem robnih pogojev dobimo radialni temperaturni profil v srajčki:

$$T_{srajcka}(r) = T_{srajcka}(r_p) - \frac{q(z)S_{gorivo}}{2\pi\lambda_{srajcka}}\ln\frac{r}{r_p} \qquad \text{za} \qquad r_g \le r \le r_p$$

Predpostavimo, da reže med gorivno tabletko in srajčko ni (v novem gorivu to ne drži) in se srajčka in tabletka stikata brez dodatnega upora za prenos toplote: $T_{srajcka}(r_g) = T_{UO2}(r_g)$. Za difuzijsko enačbo v gorivu je robni pogoj tudi znan toplotni tok pri r_g

$$j(r_g) = -\lambda_{UO2}\frac{dT}{dr}(r_g) = \frac{q(z)S_{gorivo}dz}{2\pi r_g dz} = \frac{q(z)r_g}{2}$$

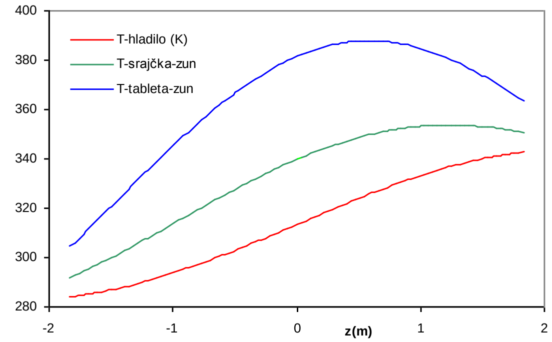
Po dvakratni integraciji Poissonove enačbe in upoštevanju robnih pogojev je radialni temperaturni profil v gorivni tabletki:

$$T_{UO2}(r) = T_{UO2}(r_g) + \frac{q(z)S_{gorivo}}{4\pi\lambda_{UO2}}\left(1 - \frac{r^2}{r_g^2}\right)$$

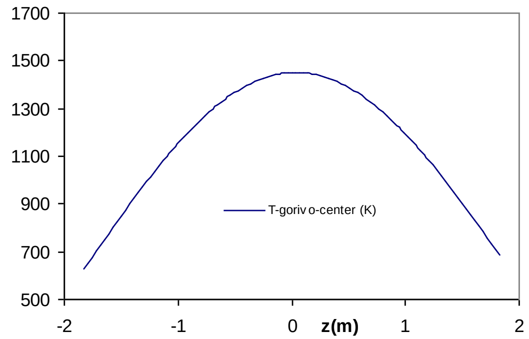
Temperaturni profil v osi gorivnega elementa v vročem kanalu je

$$T_{UO2}(r=0,z) = \frac{q(z)S_{gorivo}}{2\pi}\left(\frac{1}{2\lambda_{UO2}} - \frac{1}{\lambda_{srajcka}}\ln\frac{r_g}{r_p} + \frac{1}{r_p h}\right) + T_{hladilo}(z)$$

Temperaturni profili (^{0}C) vzdolž vročega kanala:
rdeče (spodaj) - $T_{hladilo}$
zeleno (sredina) - $T_{srajčka}(r_p)$
modro (zgoraj) - $T_{gorivo}(r_g)=T_{srajčka}(r_g)$



Temperaturni profil (^{0}C) v osi gorivne palice vročega kanala



Enačba stanja - termodinamika

Pri obravnavi Eulerjevih enačb pogosto predpostavimo, da lahko lokalno definiramo termodinamične spremenljivke in uporabimo zveze med njimi tudi v neravnovesnih situacijah. Aproksimacija je uspešna, če v toku ni udarnih valov oziroma zelo strmih gradientov. V teh zapiskih nas udarni valovi ne zanimajo in predpostavimo, da termodinamične zveze veljajo.
V tem tekstu imamo opravka samo s sistemi, v katerih nastopata dve neodvisni termodinamični spremenljivki (funkciji stanja). V Eulerjevih enačbah nastopaj tri TD funkcije ρ, p in *u*, ki se skriva v specifični polni energiji *e*, kar pomeni, da eno od njih lahko izrazimo z drugima dvema, na primer:

$$u = u(p, \rho)\,. \tag{37}$$

Zgornjo zvezo poiščemo s pomočjo enačbe stanja v diferencialni obliki, ki povezuje specifični volumen ($1/\rho$) s temperaturo *T* in tlakom *p*:

$$\rho\, d\left(1/\rho\right) = \beta dT - \chi dp\;, \tag{38}$$

Tu sta β in χ prostorninska razteznost in izotermna stisljivost. Zapis $d\left(1/\rho\right)$ ni ravno eleganten, a se z njim izognemo uporabi specifičnega volumna, ki je običajno označen s črko mali "*v*", ta pa je v Eulerjevih enačbah že rezervirana za hitrost.

Enačbo stanja, ki povezuje TD funkcije stanja (ρ, T, p), je mogoče zapisati tudi z drugimi TD funkcijami stanja. Preoblikujemo jo s pomočjo termodinamskih relacij, ki sledijo iz 1. in 2. glavnega zakona termodinamike:

$$(u, s, \rho) \qquad du = Tds - pd\left(1/\rho\right) \tag{39}$$

$$(h, s, p) \qquad dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp\;. \tag{40}$$

"Običajna" diferencialna oblika enačbe stanja:

$$dV/V = \beta dT - \chi dp$$

$$d\left(1/\rho\right) = -\frac{1}{\rho^2}d\rho$$

Energijski zakon - 1. glavni zakon termodinamike:

$$dW = dQ + dA$$

Entropijski zakon - 2. glavni zakon termodinamike. Definira absolutno temperaturo in in entropijo:

$$dS \geq dQ/T$$

V tem tekstu namesto entropije *S* uporabljamo specifično entropijo *s*.

Uvedli smo novo TD spremenljivko: specifična entropija *s*.
Preden zapišemo še nekaj termodinamičnih relacij, ki sledijo iz enačbe stanja ter TD relacij (u,s,ρ) in (h,s,p), definiramo specifični toploti

$$c_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V \quad \text{in} \quad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p . \tag{41}$$

Včasih pridejo prav še razmerje in razlika specifičnih toplot ter zvočna hitrost:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} \qquad c_p - c_V = \frac{\beta^2 T}{\rho\chi} \qquad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma}{\chi\rho^2} \tag{42}$$

Odvod pri konstantnem volumnu *V* pomeni tudi odvod pri konstantni gostoti ρ.
Brez izpeljav (navajata jih Kuščer in Žumer v knjigi "Toplota") lahko zapišemo nekaj TD relacij, ki povezujejo nekatere trojice TD funkcij:

(u,T,ρ) $$du = c_V dT + \left(\frac{T\beta}{\chi} - p\right) d\left(1/\rho\right) \tag{43}$$ ("Toplota", str. 48)

(h,T,p) $$dh = c_p dT + \left(\frac{1-\beta T}{\rho}\right) dp \tag{44}$$ ("Toplota" str. 48)

(s,T,ρ) $$ds = \frac{c_V}{T} dT + \frac{\beta}{\chi} d\left(1/\rho\right) \tag{45}$$ ("Toplota" str. 46)

(s,T,p) $$ds = \frac{c_p}{T} dT - \frac{\beta}{\rho} dp \tag{46}$$ ("Toplota" str. 46)

(u,p,ρ) $$-\beta\rho du = \left(c_p - \frac{p\beta}{\rho}\right) d\rho + \chi\rho c_V dp \tag{47}$$

(h,p,ρ) $$dh = c_p d\rho + \left(\frac{\chi\rho c_V + \beta}{\beta\rho}\right) dp \tag{48}$$

Naloga 12: zapiši energijsko enačbo s temperaturo.

A) Začni z obliko energijske enačbe: $\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial \rho u v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial x}=q+F_{tr}v$ in upoštevaj termodinamsko zvezo (u,T,ρ). Rezultat:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}+\rho c_v v\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{T\beta}{\chi}\frac{\partial v}{\partial x}=q+F_{tr}v \tag{49}$$

B) V zgornji energijski enačbi zamenja spec. notranjo energijo z spec. entalpijo, upoštevaj zvezo (H,T,p). Rezultat:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}+\rho c_p v\frac{\partial T}{\partial x}-\beta T\left(\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial x}\right)=q+F_{tr}v \tag{50}$$

Naloga 13: zapiši enačbo za transport entropije.

Začni z obliko energijske enačbe: $\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial \rho u v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial x}=q+F_{tr}v$ in upoštevaj termodinamsko zvezo med (u,s,ρ). Rezultat:

$$\rho T\frac{\partial s}{\partial t}+v\rho T\frac{\partial s}{\partial x}=q+F_{tr}v \tag{51}$$

Naloga 14: Izračunaj spremembo entropije in temperature pri pretakanju vode s temperaturo 20 ^{o}C skozi 100 m dolgo gladko cev s premerom 10 cm in hitrostjo toka 1 m/s (Glej naloge 7,12,13)
a) če v cevi ni trenja: $\Delta s = 0$, $\Delta T = 0$
b) upoštevaj trenje vode z viskoznostjo 0.001 Pa.s.

Rezultati naloge 7: $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho v D}{\mu}$ =100000, f_w=0.018, F_{tr} =90 N/m^3,
iz transportne enačbe za entropijo iz naloge 13 sledi

$$\Delta s = \frac{F_{tr}}{\rho T}\Delta x = 0.03 \text{ J/kg.K} .$$

Iz transportne enačbe za temperaturo v nalogi 12 in iz gibalne enačbe pa sledi:

$$\rho c_p v \frac{\Delta T}{\Delta x} - \beta T v \frac{\Delta p}{\Delta x} = F_{tr} v \quad \text{ter} \quad \frac{\Delta p}{\Delta x} = -F_{tr}$$

$$\Delta T = \frac{F_{tr}\Delta x}{\rho c_p}(1 - \beta T) = 0.002 \text{ K}$$

(drugi člen je zanemarljiv - prostorninska razteznost vode je pri 20 ^{o}C ~10^{-6}/K)

Naloga 15: Tlačnik

Volumen tlačnika JE Krško je 28 m3, moč grelcev tlačnika je 1 MW. V tlačniku je med normalnim obratovanjem elektrarne 60% kapljevine in 40% pare. Kapljevina in para v tlačniku sta v ravnovesju pri temperaturi nasičenja, ki ustreza tlaku 15.5 MPa. Za minuto se prižge za 0.5 MW grelcev potopljenih v kapljevino. Za koliko se spremenita tlak in temperatura v tlačniku? Obravnavaj tlačnik kot idealno toplotno izoliran. Tudi med segrevanjem predpostavi toplotno ravnovesje med fazama. Prav tako predpostavi, da ni pretoka med tlačnikom in primarnim sistemom. Ker gre za majhne spremembe tlaka in temperature, lineariziraj enačbe okoli začetnega stanja. Del parnih tabel - krivulja nasičenja:

T (K)	p (Pa)	ρ_g (kg/m^3)	ρ_f (kg/m^3)	u_g (kJ/kg)	u_f (kJ/kg)
618.0	15504465.	101.967	594.194	2443342.	1603671.
618.2	15542891.	102.377	593.479	2442435.	1605099.

Linearizirane Eulerjeve enačbe za posodo (brez gibalne enačbe in transportnih členov v kontinuitetni in energijski enačbi):

$$\Delta\rho = 0$$

$$\Delta\rho u = P_{grelci} t / V_{tlač}$$

ker imamo opravka s posodo v kateri sta dve fazi, ločimo lastnosti pare in kapljevine in uvedemo volumski delež pare α:

$$\Delta\left(\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_f\right) = 0$$

$$\Delta\left(\alpha\rho_g u_g + (1-\alpha)\rho_f u_f\right) = P_{grelci} t / V_{tlač}$$

Ker je sistem ves čas v nasičenju lahko zapišemo $\Delta\rho_g = \left(\frac{d\rho_g}{dp}\right)_{sat} \Delta p$, $\Delta\rho_f = \left(\frac{d\rho_f}{dp}\right)_{sat} \Delta p$,

$\Delta u_g = \left(\frac{du_g}{dp}\right)_{sat} \Delta p$, $\Delta u_f = \left(\frac{du_k}{dp}\right)_{sat} \Delta p$,

kjer indeks *sat* pomeni, da gre za spremembe (odvode) vzdolž krivulje nasičenja (saturation). Vse zgornje odvode aproksimiramo s pomočjo parnih tabel. Iz kontinuitetne enačbe izrazimo $\Delta\alpha$, ga skupaj z vrednostmi odvodov, gostot in specifičnih notranjih energij vstavimo v energijsko enačbo in dobimo porast tlaka 0.7 bar ter porast temperature v tlačniku 0.4 K.

Naloga 16:
Turbina - Bernoullijeva enačba. V turbino JE Krško vstopa 1090 kg/s pare z entalpijo 2775 kJ/kg. Primerjaj kinetično energijo pare v parovodu (presek parovoda 0.672 m2 in gostota pare 32.5 kg/m3) s kinetično energijo vode, ki vstopa v turbino hidroelektrarne s podobno električno močjo: Sajano-Šušenskaja - pretok 360 m3/s, padec 194 m (dejanska moč 650 MW).

P_{hidro} = 700 MW (dejanska električna moč 650 MW)

$P_{\mathrm{para\_Wk\_JEK}}$ = 0.5 MW !

Za večjo moč moramo paro ekspandirati - pospešiti!

Naloga 16a
Turbina - ekspanzija pare:
Kolikšna bi bila po Bernoullijevi enačbi maksimalna mehanska moč (kinetična energija), ki jo lahko dobi para v JEK, če para v turbini ne bi kondenzirala? Entalpija pare v kondenzatorju (30 ^{o}C) je 2556 kJ/kg?

$P_{\mathrm{mehanska}} = (h_{in}-h_{out})$*(masni tok)= 240 MW.

Ker nekaj % pare kondenzira že v turbini, je končna entalpija mešanice hladne pare in kondenzirane kapljevine precej manjša - povprečno 2100 kJ/kg.

Naloga 16b:
Pregrevanje pare med visoko in nizkotlačno turbino.
Na poenostavljen modelu turbin JEK lahko pokažemo razliko med krožnim procesom brez pregrevanja pare in z pregrevanjem med visokotlačno in nizkotlačno turbino. Podatki o entalpijah v nalogi so prepisani iz varnostnega poročila JEK (NEK USAR slika 10.1-8).

a) Brez pregrevanja pare. Na vstopu v turbino imamo masni tok pare Φ_M= 1090 kg/s s specifično entalpijo h_1=2775 kJ/kg (p=6.23 MPa, T=278°C - v entalpiji je upoštevan tudi 0.5% masni delež kapljevine). Na izstopu iz visokotlačne turbine ima zmes pare in kapljic specifično entalpijo h_2=2519 kJ/kg (p=1.0 MPa, T=179.2°C). Iz zmesi odstranimo 13% masni delež kapljevine (za to ni potreben vložek energije) in dobimo paro s specifično entalpijo h_3=2755 kJ/kg (p=1.0 MPa, T=179.2°C), ki jo peljemo na nizkotlačno turbino. Tam para ekspandira in ima na izhodu iz nizkotlačne turbine specifično entalpijo h_4=2331 kJ/kg (p=5000 Pa, T=33.2°C - v tej pari je precejšen delež kapljic).

Izračunaj mehansko moč visoko in nizkotlačne turbine.

$$P_{VT}= \Phi_M * (h_1 – h_2) = 279 \text{ MW}$$

$$P_{NT} = 0{,}87 * \Phi_M * (h_3 - h_4) = 402 \text{ MW}$$

v JE Krško sta pravzaprav nizkotlačni turbini dve - vsaka ima približno polovico te moči.

Skupna moč turbin brez vmesnega pregrevanja pare: $P_{VT} + P_{NT}$ = 681 MW.

b) Pregrevanje pare. Izračunaj moč istih turbin, če pred vstopom v visokotlačno turbino odvzamemo 10% pare in jo uporabimo za pregrevanje pare na izhodu iz visokotlačne turbine. Predpostavi 100% izkoristek pregrevalnika pare.

Ko mešanica pare in kapljic pride iz visokotlačne turbine se najprej izloči 13% masni delež kapljevine, paro s h_3=2755 kJ/kg (p=1.0 MPa, T=179.2°C) pa se pregreje z 10% vroče pare (T=278°C).

$P_{VT} = 0{,}9 * \Phi_M * (h_1 - h_2)$ = 251 MW

$P_{NT} = 0.9 * 0.87 * \Phi_M * (h_x - h_4)$

Izračunati je potrebno še h_x - specifično entalpijo pare po pregrevanju:

Masni tok vroče pare Φ_{MP} = 109 kg/s (10% odvzete pare iz uparjalnika) v izmenjevalniku toplote kondenzira pri temperaturi 278°C in tlaku 6.2 MPa. Iz parnih tabel razberemo, da je izparilna entalpija (razlika specifičnih entalpij pare in kapljevine) pri tem tlaku:

h_{izp} = 2775 kJ/kg - 1215 kJ/kg = 1550 kJ/kg.

Ta izparilna entalpija pri konstantnem tlaku segreje hladno paro (179.2 °C), ki prihaja iz visokotlačne turbine.

velja: $\Phi_{MP} * h_{izp} = (0{,}9 * 0{,}87 * \Phi_M) * (h_x - h_3)$

10% * 1090 kg/s * 1550 kJ/kg = (90% * 87% * 1090 kg/s) * (h_x - 2755 kJ/kg)

h_x = 2953 kJ/kg (pri p=~1 MPa, T=256°C - ta para je pregreta - te temperature se iz parnih tabel, ki opisujejo samo stanje nasičenja ne dobi, potrebne so popolne parne tabele)

Od tod sledi P_{NT} = 532 MW. Skupna moč turbin s pregrevanjem pare je $P_{VT}+P_{NT}$ = 783 MW.

Dejanska moč vseh turbin je 727 MW saj izmenjava toplote v pregrevalniku pare ne poteka s 100% izkoristkom. Tudi del pare, ki se porabi za pregrevanje napajalne vode uparjalnika v nalogi ni upoštevan.

Naloga 16c

Regenerativno gretje napajalne vode uparjalnika.

Na poenostavljen modelu sekundarnega kroga JEK lahko pokažemo razliko med krožnim procesom brez regenerativnega gretja napajalne vode uparjalnika in z regenerativnim gretjem.
Na pregrevanje pare v tej nalogi pozabimo in visokotlačno in obe nizkotlačni turbini obravnavamo kot eno samo. Podatke o entalpijah preberemo iz varnostnega poročila JEK (NEK USAR slika 10.1-8).

a) Brez regenerativnega gretja

Pred vstopom v uparjalnik je masni pretok napajalne vode uparjalnika Φ_M = 1090kg/s, specifična entalpija vode h_{IN} = 139 kJ/kg, temperatura T = 33°C in tlak p = 6,2 MPa. Uparjalnika delujeta s skupno močjo P_{UP} = 2000 MW. Kolikšna je specifična entalpija h_1 mešanice pare in kapljevine na izhodu iz uparjalnika?

$$P_{UP} = \Phi_M * \Delta h = \Phi_M * (h_1 - h_{IN})$$

$$h_1 = 1990 \text{ kJ/kg}$$

Kolikšen je delež suhe pare in kapljic?

$$(1\text{-}x) * h_f + x * h_g = P_{UP}/ \Phi_M \quad ,$$

Iz parnih tabel preberemo specifični entalpiji pare h_g=2780 kJ/kg in kapljevine h_f=1224 kJ/kg pri znanem tlaku nasičenja 6.2 MPa (uparjalnik toploto dovaja pri konstantnem tlaku). Od tod sledi masni delež pare na izhodu

x = 0,49

Polovica (51%) masnega pretoka je izgubljena, saj je v kapljevinastem stanju in ne opravi koristnega dela v turbini. Kolikšna bi bila mehanska moč turbine P_{TUR} , če bi toplo kapljevino odpeljali v kondenzator in jo tam ohladili (kar seveda ne naredi noben inženir ali fizik)?

Specifično entalpijo pare na izhodu iz turbine preberemo iz varnostnega poročila JEK (NEK USAR slika 10.1-8): h_2 = 2331 kJ/kg, za specifično entalpijo pare, ki vstopa v turbino vzamemo vrednost iz parnih tabel 2780 kJ/kg :

$$P_{TUR} = x * \Phi_M * (h_g - h_2) = 240 \text{ MW}$$

Moč kondenzatorja: $P_{KON} = x * \Phi_M * (h_2 - h_{IN}) + (1\text{-}x) * \Phi_M * (h_K - h_{IN})$ = 1770 MW

Majhna moč na turbini in velika na kondenzatorju. Pridelali smo 10 MW razlike med vsoto moči turbine in kondenzatorja v primerjavi z močjo uparjalnika. Izognili bi se ji z bolj natančnim odčitavanjem parnih tabel.

b) Z regenerativnim gretjem

Če na izhodu iz uparjalnika masni delež tople kapljevine ločimo od pare in ga brez ohlajanja pomešamo s hladno vodo, ki pride iz turbine in kondenzatorja, se proces bistveno izboljša. Na vstopu v oba uparjalnika je masni tok napajalne vode Φ_M = 1090kg/s. Uparjalnika vodi povečata entalpijo za

P_{UP}/ Φ_M = 2000 MW/1090kg/s = 1835 kJ/kg.

Na izstopu iz uparjalnika imamo mešanico kapljevine in pare pri T=278 ^oC. Kakšen je delež vroče kapljevine, ki jo proizvede uparjalnik in jo (seveda brez ohlajanja) primešamo hladni kapljevini iz kondenzatorja?

Entalpija na izhodu iz uparjalnika: $h_{UP} = x\, h_g + (1\text{-}x)\, h_f$
Pri T=278 ^0C v tabelah oziroma iz prejšnje naloge prepišemo h_g=2780 kJ/kg in kapljevine h_f=1224 kJ/kg.

Entalpija napajalne vode uparjalnika: $h_{NAP} = x\, h_2 + (1\text{-}x)\, h_f$
pomešali smo kondenzirano paro iz uparjalnika z entalpijo h_2=139 kJ/kg (T=33 ^oC) in toplo kapljevino z izhoda uparjalnika.

$h_{UP} - h_{NAP} = P_{UP} / \Phi_M$

od tod sledi masni delež pare na izhodu iz uparjalnike x=0.695
ter moč turbine, v kateri se entalpija pare zmanjša

$$P_{TUR} = x * \Phi_M * (h_g – h_2) = 340 \text{ MW}$$

Moč kondenzatorja:

$$P_{KON} = x* \Phi_M * (h_2 – h_3) = 1660 \text{ MW}$$

Poveča se moč turbine in zmanjša moč kondenzatorja. Regenerativno gretje napajalne vode pomeni zbiranje pare z velikim deležem kapljic med dvema od 12 stopenj visokotlačne turbine in med štirimi od 10 stopenj nizkotlačne turbine in uporabo te tekočine za pregrevanje napajalne vode. Za razliko od poenostavitve v tej nalogi, kjer smo toplo vodo v celoti primešali hladni vodi iz kondenzatorja, se v elektrarni del toplote med obema kapljevinama izmenja v izmenjevalcih toplote in brez dejanskega mešanja.

Literatura:

Kuščer, Žumer, Toplota, DMFA 1987
Sekavčnik, Tuma, Energetski stroji in naprave, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 2005, http://lab.fs.uni-lj.si/kes/LTE/EStroji/ESN_skripta.pdf
Toplotna prevodnost UO_2: ORNL/TM-2000/351
(http://www.ornl.gov/~webworks/cpr/v823/rpt/109264.pdf)
Prevodnost Zr: http://bibliothek.fzk.de/zb/berichte/FZKA6739.pdf