Kolokvij iz analitične mehanike 8.12. 2000

1. Za trenutek si predstavljajmo, da je Zemlja idealna, popolnoma gladka krogla, po kateri njeni prebivalci drsijo brez trenja. Zapiši Lagranževe enačbe za izbranega prebivalca (privzemi, da trkov ni) in jih reši! Za opis gibanja uporabi krogelne koordinte (φ, ϑ) vezane na površino Zemlje. Ne pozabi upoštevati vrtenja Zemlje.

2. Za delec, ki se giblje v škatlastem centralno simetričnem potencialu oblike $V = \begin{cases} V_0 & za\ r_1 \le r \le r_2 \\ 0 & sicer \end{cases}$, skiciraj efektivni potencial in klasificiraj možne orbite. Količšno najmanjšo kinetično energijo mora imeti delec za pobeg, če se nahaja znotraj območja $r < r_1$? Če je kinetična energija delca premajhna za pobeg ugotovi, pri katerih vrednostih vrtilne količne bodo vezane orbite delca zaključene?

3. Laplace-Runge-Lenzov vektor je definiran kot $\vec{R} = \vec{p} \times \vec{L} - mK\dfrac{\vec{r}}{r}$ in je za $H = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{K}{r}$ ($K > 0$) konstanta gibanja. Za isti H je tudi vektor vrtilne količine $\vec{L}$ konstanta gibanja. Izračunaj Poissonov oklepaj med komponentami obeh vektorjev npr. $[R_i, L_j]$!

4. Drobna utež se brez trenja giblje po žici zviti v krivuljo, ki leži v navpični ravnini. Kakšna mora biti oblika krivulje $x(s)$, $z(s)$, da bo utež nihala z enako frekvenco neodvisno od amplitude? Namig: zapiši Hamiltonovo funkcijo in upoštevaj da na tak način niha harmonično nihalo.