Kazalo

1. Idealne tekočine

Preglejmo osnovne koncepte. Dinamiko neviskoznih tekočin opiše *Eulerjeva* enačba (2. Newtonov zakon za delček tekočine, zapisan na enoto prostornine):

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = -\nabla p, \tag{1.1}$$

kjer je $\mathbf{v}$ hitrost tekočine v neki točki, p pa tlak v njej. Ohranitev mase zapišemo s kontinuitetno enačbo za gostoto ρ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{1.2}$$

kjer je $\rho\mathbf{v}$ gostota masnega toka (masni tok na enoto površine). Tudi Eulerjevo enačbo lahko zapišemo v obliki kontinuitetne enačbe – za gostoto gibalne količine $\mathbf{g}$ (zaradi jasnosti tokrat v komponentni obliki):

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij} = 0, \tag{1.3}$$

kjer je $\Pi_{ij} = \rho v_i v_j + p\delta_{ij}$ gostota toka gibalne količine, ki je tenzor, saj je gibalna količina vektor.

Če poznamo vrtinčnost $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}$ hitrostnega polja, le-to (do konstante in brezvrtinčnega dela) dobimo po Biot-Savartu (popolna analogija z magnetnim poljem, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}$):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{1.4}$$

oziroma

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{1.5}$$

če je vsa vrtinčnost zbrana na neskončno tanki vrtinčni niti s cirkulacijo Γ in integracija teče vzdolž nje.

Bernoullijeve enačbe so posledica ohranitve energije. Če je tok **brezvrtinčen** ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{v} = \nabla\phi$), velja

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \Phi + \frac{1}{2}v^2 + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0, \tag{1.6}$$

kjer je Φ potencial na enoto mase, npr. gravitacijski potencial $\Phi = gz$, kjer je z višina. Vrednost izraza v oklepaju je torej v danem trenutku po vsej tekočini enaka. Če je tok **obenem še stacionaren**, neodvisno od časa velja

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \Phi + \frac{1}{2}v^2 \right) = 0. \tag{1.7}$$

Za **stacionarno, a v splošnem vrtinčno** hitrostno polje pa velja Bernoullijeva enačba le v obliki

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\Phi+\frac{1}{2}v^2\right)=0, \tag{1.8}$$

torej je vrednost izraza v oklepaju konstantna le vzdolž tokovnice. Bernoullijeve enačbe smo zapisali za primer nestisljive tekočine ($\rho = \mathrm{const.}$). Veljajo tudi v stisljivem primeru, če je gostota le funkcija tlaka in člen p/ρ posplošimo v $\int_0^p \mathrm{d}p/\rho(p)$.

Pri dvorazsežnem nestisljivem ($\nabla\cdot\mathbf{v}=0$) brezvrtinčnem toku (torej $\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla^2\phi=0$) smemo zaradi $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$ definirati *tokovno funkcijo* ψ:

$$(v_x,v_y)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\equiv\left(\frac{\partial\psi}{\partial y},-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \tag{1.9}$$

od koder sledi, da je tudi $\nabla^2\psi=0$ ter da je

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\psi=0 \tag{1.10}$$

in je torej ψ konstanten vzdolž tokovnice (odtod ime). Iz Cauchy-Riemannovih zvez (1.9) pa sledi, da je

$$w(z)=\phi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y),\quad z=x+\mathrm{i}y, \tag{1.11}$$

analitična funkcija v kompleksnem, ki torej vedno predstavlja nek nestisljiv brezvrtinčni tok. Njen odvod je

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\mathrm{i}\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\mathrm{i}\partial y}=v_x-\mathrm{i}v_y. \tag{1.12}$$

Volumski pretok Q čez poljubno krivuljo (smo v 2D), ki poteka med točkama $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$, se izraža s tokovno funkcijo kot

$$Q=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathrm{d}l\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}v_x\mathrm{d}y-v_y\mathrm{d}x=\psi(\mathbf{r}_2)-\psi(\mathbf{r}_1), \tag{1.13}$$

z normalo na krivuljo $\mathbf{n}=(\mathrm{d}y,-\mathrm{d}x)/\mathrm{d}l$ in upoštevanjem definicije (1.9).

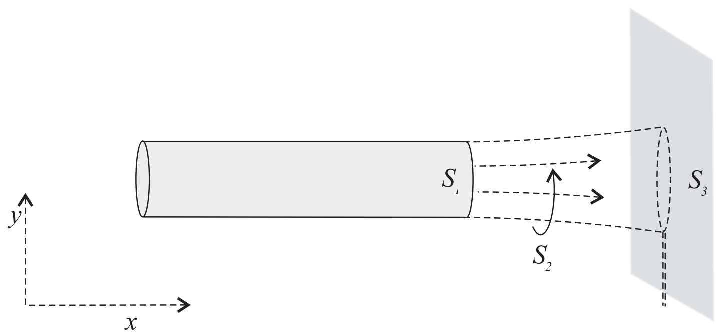
1.1 Pretakanje po ceveh

Naloga

Curek tekočine pada pravokotno na steno in spolzi ob njej. Kolikšna je sila na steno?

Rezultat že poznamo, zato bomo ta primer izkoristili za ilustracijo postopka reševanja. Zaradi stacionarnosti hitrostnega polja je gibalna količina izbranega dela tekočine – curka med koncem cevi in steno – konstantna:

$$0=\frac{\partial G_i}{\partial t}=\int\mathrm{d}V\frac{\partial g_i}{\partial t}=-\int\mathrm{d}V\frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ij}=-\oint\mathrm{d}S_j\,\Pi_{ij}, \tag{1.14}$$



Slika 1.1: Curek, ki priteče iz cevi, pada pravokotno na steno in nato spolzi ob njej.

kjer smo najprej uporabili enačbo (1.3), nazadnje pa volumski integral prevedli na integral po površinah S_1, S_2 in S_3. Tlaka ob prvih dveh sta enaka zračnemu, ki ga lahko postavimo na 0, tlak p_3 ob steni pa bo ravno podajal Zapišimo po komponentah (os x naj bo v smeri hitrosti):

$$0 = senadaljuje... \tag{1.15}$$

Izberimo koordinatni sistem tako, da bo os x vzporedna curku in bo kazala v nasprotni smeri kot normala na ploskev. Za del curka, kjer voda ni več v cevi in ga na sliki omejujejo ploskve S_1, S_2 in S_3, zapišimo enačbo (**??**) po komponentah. Pri zapisu tlakov p_1, p_2 in p_3 bomo upoštevali, da je za vodo med cevjo in steno tlak znotraj mejne ploskve enak tlaku zunaj nje. Zato sta p_1 in p_2 enaka nič, p_3 pa je sila vode na enoto površine stene.

$$\frac{\partial G_x}{\partial t} = \int \varrho v_{1x}^2 \, \mathrm{d}S_{1x} + \int \left(p_3 + \varrho v_{3x}^2\right) \, \mathrm{d}S_{3x}, \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial t} = \int \varrho v_{1x} v_{1y} \, \mathrm{d}S_{1x} + \int \varrho v_{3x} v_{3y} \, \mathrm{d}S_{3x}. \tag{1.17}$$

Upoštevali smo, da imata ploskvi S_1 in S_3 samo komponento v smeri x, za ploskev S_2 pa velja, da je hitrost povsod na površini pravokotna na normalo ploskve in je zato člen $\varrho(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathbf{v}$ enak nič. Ker je tudi $p_2 = 0$, je prispevek ploskve 2 v enačbah (1.16) in (1.17) enak nič.

Upoštevajmo še, da je stanje kvazistacionarno in velja, da je $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ in $\mathbf{F}_3 = \int p \, \mathrm{d}S_3$. Za primer, ko v cevi ni nadtlaka, tako sledita izraza

$$\frac{\partial G_x}{\partial t} = \int \varrho v_1^2 \, \mathrm{d}S_1 - F_{2x} = 0 \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial G_y}{\partial t} = -F_{2y} = 0.$$

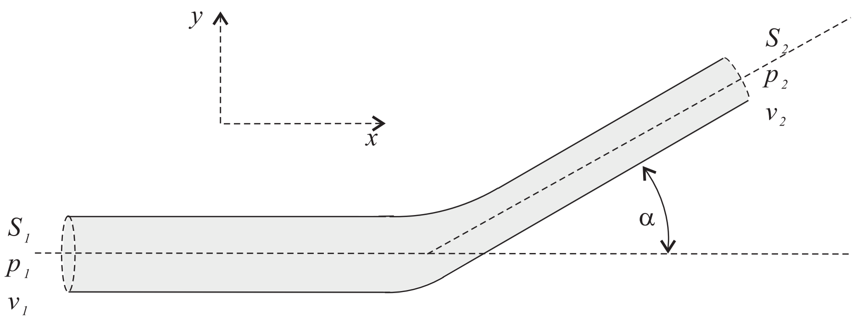
Komponenti sile sta potem enaki

$$F_{2x} = \varrho v_1^2 S_1,$$

$$F_{2y} = 0.$$

Naloga

Nestisljiva neviskozna tekočina teče po cevi s kolenom, ki zasuka smer curka za kot α. S kolikšno silo deluje voda na cev, če je v kraku pod kolenom hitrost tekočine v_1, nadtlak enak p_1 in presek cevi S_1, v kraku za kolenom pa ima tekočina hitrost v_2, nadtlak v cevi je p_2, presek cevi pa je S_2?



Slika 1.2: Nestisljiva tekočina teče po cevi s kolenom, ki zasuka smer curka.

Zapišimo komponenti časovnega odvoda gibalne količine tekočine v cevi in upoštevajmo, da je hitrost ob stenah cevi pravokotna na normalo stene. Integral tlaka po površini cevi zapišimo z F_x. Hitrost $\mathbf{v}_1$ je enaka $v_1(1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (\cos\alpha\, v_3, \sin\alpha\, v_3)$, $\mathrm{d}\mathbf{S}_1 = \mathrm{d}S_1(-1,0)$ in $\mathrm{d}\mathbf{S}_3 = \mathrm{d}S_3(\cos\alpha, \sin\alpha)$, gibanje pa je kvazistacionarno.

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_x}{\partial t} &= \int \left(p_1 + \varrho v_1^2\right)\,\mathrm{d}S_1 - F_x - \int \left(p_2 + \varrho v_3^2\cos^2\alpha\right)\cos\alpha\,\mathrm{d}S_3 - \\ &- \int \varrho v_3^2 \cos\alpha \sin^2\alpha\,\mathrm{d}S_3 = 0,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial t} = -F_y - \int (p_2 + \varrho v_3^2\sin^2\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{d}S_3 - \int \varrho v_3^2 \sin\alpha\cos^2\alpha\,\mathrm{d}S_3 = 0.$$

Ko izraza uredimo in integriramo, vidimo, da je

$$F_x = (p_1 + \varrho v_1^2)S_1 - (p_3 + \varrho v_3^2)S_3\cos\alpha, \tag{1.18}$$

$$F_y = -(p_3 + \varrho v_3^2)S_3\sin\alpha. \tag{1.19}$$

V nadaljevanju si bomo ogledali tri posebne primere:

- $S_1 = S_2 = S$. Iz zakona o ohranitvi pretoka sledi, da je

$$S v_1 = S v_2 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = v_2,$$

iz Bernoullijeve enačbe

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g h_2 \tag{1.20}$$

pa preberemo še, da je $p_1 = p_2$, saj sta v našem primeru oba konca cevi na isti višini. Tako dobimo za silo na cev izraza

$$F_x = (p_1 + \varrho v_1^2)S(1 - \cos\alpha) \qquad \text{in} \qquad F_y = -(p_1 + \varrho v_1^2)S\sin\alpha. \tag{1.21}$$

- $S_1 = S_2 = S$ in $p_1 = p_2 = 0$, kar pomeni, da je tlak v obeh krakih cevi enak zunanjemu zračnemu tlaku. Vstavimo $p_1 = p_2 = 0$ v enačbi (1.21), pa dobimo

$$F_x = \varrho v_1^2 S(1 - \cos\alpha),$$

$$F_y = -\varrho v_1^2 S\sin\alpha.$$

- Cev je zožena, a brez kolena ($\alpha = 0$). Vstavimo v enačbi (1.18) in (1.19) $\alpha = 0$, upoštevajmo kontinuitetno enačbo $S_1 v_1 = S_2 v_2$ in Bernoullijevo enačbo (1.20):

$$F_x = p_1(S_1 - S_2) + \varrho v_1^2 S_1 \left(1 - \frac{1}{2}(S_2/S_1 + S_1/S_2)\right),$$

$$F_y = 0.$$

Če izenačimo S_1 in S_2, kar ustreza cevi s konstantnim presekom, postane sila F_x enaka nič. Na ravno cev, po kateri teče neviskozna tekočina, pač ne deluje nobena sila.

1.2 Dvorazsežni primeri

V nadaljevanju nas bodo zanimale nestisljive in brezvrtinčne tekočine. Poiskali bomo hitrostna polja v več različnih dvodimenzionalnih primerih. Za nestisljive tekočine velja $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, zato sledi iz kontinuitetne enačbe $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ zveza

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{1.22}$$

Upoštevajmo še, da nas zanimajo dvodimenzionalni primeri, in sicer ravnine, ki so pravokotne na $\mathbf{g}$. V tem primeru lahko zadnji člen v Eulerjevi enačbi, $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla(\frac{p}{\rho}) + \mathbf{g}$, zanemarimo. Če delujemo nato na celo enačbo še z operatorjem $\nabla\times$ in upoštevamo, da je $\frac{1}{2}\nabla(v^2) = \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$, sledi enačba, katere rešitev je $\nabla\times\mathbf{v} = 0$. Ker je $\nabla\times(\nabla\phi) \equiv 0$, lahko $\mathbf{v}$ izrazimo z gradientom neke funkcije ϕ:

$$\nabla\times\mathbf{v} = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{v} = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right). \tag{1.23}$$

Upoštevajmo še enačbo (1.22), pa dobimo

$$\Delta\phi = 0. \tag{1.24}$$

V nadaljevanju bomo uvedli še funkcijo ψ, ki naj bo definirana takole:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1.25}$$

Pokažimo, da opisuje ψ tokovnico. Spremembo ψ vzdolž tokovnice zapišemo kot

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y = -v_y\mathrm{d}x + v_x\mathrm{d}y, \tag{1.26}$$

kjer mora kazati vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ vzdolž tokovnice, torej je vzporeden hitrosti. Vzporedna vektorja imata isti naklon: $\frac{v_y}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Vstavimo tole enačbo v enačbo (1.26), pa dobimo

$$\mathrm{d}\psi = 0.$$

Vprašali se bomo še, kolikšen je prostorninski pretok (Q) med dvema točkama v tekočini. Označimo točki z A in B. Pretok bomo izračunali tako, da bomo po poti iz točke A v točko B sešteli prispevke $\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}_*$. Krivulja naj bo ves čas pravokotna na tokovnice. Izberimo, da naj kaže vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ ves čas vzdolž tokovnice. Tako ima $\mathrm{d}\mathbf{l}_*$, ki je nanj pravokoten, komponenti $(\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x)$. Za pretok torej velja:

$$\begin{aligned} Q &= \int_A^B \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}_* = \int_A^B (v_x, v_y)\cdot(\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x) = \\ &= \int_A^B \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\mathrm{d}y + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x\right) = \int_A^B \mathrm{d}\psi = \psi_B - \psi_A. \end{aligned} \tag{1.27}$$

V zgornjem izrazu smo upoštevali zvezi (1.25) in pokazali, da lahko pretok skozi območje med točkama A in B izračunamo kar kot razliko ψ-jev v teh dveh točkah.

Poiščimo še zvezo med hitrostjo tekočine in tlakom v tekočini. V ta namen bomo uporabili Eulerjevo enačbo, $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla(\frac{p}{\rho}) + \mathbf{g}$. V dvodimenzionalnem primeru $\mathbf{g}$ nima opazne vloge, saj je ravnina, v kateri nas zanima gibanje tekočine, pravokotna na $\mathbf{g}$. Upoštevajoč enačbo (1.23), $\mathbf{v} = \nabla\phi$, ter zvezo iz vektorske analize, $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\nabla v^2$, lahko Eulerjevo enačbo zapišemo kot

$$\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(v^2) - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \nabla(\frac{p}{\rho}) = 0.$$

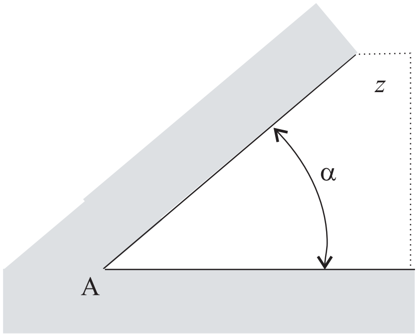
Če upoštevamo, da je $\nabla\times\mathbf{v} = 0$, sledi, da je

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = f(t). \tag{1.28}$$

Izkaže se, da funkcijo ϕ najlaže poiščemo z reševanjem v kompleksnem. Funkciji ϕ in ψ bom zapisali kot realni in imaginarni del neke nove funkcije $w(z)$, kjer bo $z = x + iy$:

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Funkcija $f(z)$ bo odvedljiva v kompleksnem, saj nas bodo zanimale samo take funkcije ϕ in ψ, ki so zvezne funkcije spremenljivk x in y, enačbi (1.23) in (1.25) pa nam povesta, da so izpolnjeni tudi Cauchy-Riemanovi pogoji: $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ in $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$.



Slika 1.3: Določili bomo tok vode v območju, ki ga omejujeta dve steni. Ti oklepata kot α.

Naloga

Za prvi zgled izračunajmo hitrostni profil tekočine v območju, ki je omejeno z dvema polravninama tako, kot kaže slika. Kot med ravninama je α.

Računanja se bomo najprej lotili tako, da bomo zapisali rešitve enačbe $\Delta\phi = 0$ in upoštevali robni pogoj: hitrost vode mora biti ob površini vzporedna s površino.

Da bi bila naša rešitev uporabna za vse kote α in ne samo za $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ali 0, jo bomo zapisali v cilindričnih koordinatah. Koordinatno izhodišče bomo izbrali v presečišču polravnin, na sliki (1.3) je označeno s točko A.

$$\Delta\phi(r,\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(r,\varphi) = \sum_l (A_l \sin l\varphi + B_l \cos l\varphi)(r^l + C_l r^{-l}).$$

Konstanta C_l v zgornji enačbi mora biti enaka nič, saj ϕ ne sme divergirati pri $r = 0$. Zapišimo še robna pogoja:

$$v_\varphi(\varphi = 0) = v_\varphi(\varphi = \alpha) = 0.$$

Upoštevajmo, da je $v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$, pa dobimo

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0,\alpha} = \sum_l r^{l-1} l \left(A_l \cos l\varphi - B_l \sin l\varphi\right)\Big|_{\varphi=0,\alpha} = 0,$$

$$A_l = 0 \quad \text{in} \quad l\alpha = N\pi \Rightarrow l = \frac{N\pi}{\alpha}.$$

Funkcija ϕ je torej takole odvisna od r in φ:

$$\phi(r,\varphi) = \sum_N B_N r^{\frac{N\pi}{\alpha}} \cos\frac{N\pi}{\alpha}\varphi. \tag{1.29}$$

Da bi določili konstante B_N, moramo imeti še kakšen podatek o hitrostnem profilu tekočine, recimo še hitrost vode zelo daleč stran od presečišča polravnin. Za primer, ko je $\alpha = \pi$, ta pogoj poznamo. Hitrost vode je povsod vzporedna steni, zato velja $\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{\varphi=0,\pi} = v_0$. To pa pomeni, da je od nič različen le koeficient B_N pri $N = 1$.

Iz zvez (1.23) in (1.25) izračunamo tudi tokovnice. To prepuščamo bralcu za vajo, rezultat bo našel v naslednjem odstavku.

Funkcijo ϕ, ki opisuje hitrostni profil tekočine na sliki (1.3), lahko določimo tudi drugače, z uvedbo kompleksne funkcije $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$. Za tok vode ob ravni steni bo $w(z)$ kar enak $v_0 z$, saj dobimo samo v tem primeru pravilen izraz za hitrost. Če funkciji ϕ in ψ spet izrazimo s polarnimi koordinatami, dobimo

$$w(z) = v_0 z = v_0 r e^{i\varphi} = v_0 r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Sledi $\phi = v_o r\cos\varphi$ in $\psi = v_o r\sin\varphi$. Hitrostno polje ima torej komponenti $v_r = v_0\cos\varphi$, $v_\varphi = -v_0\sin\varphi$, tokovnice pa opisuje enačba $v_0 r\sin\varphi = \text{konst.}$

Kakor hitro poznamo $w(z')$ za tok vode ob ravni steni, je izraz za $w(z)$ v primeru dveh sten, ki oklepata kot α (slika 1.3), na dlani. Polprostor ob ravni steni namreč lahko preslikamo v območje, označeno na sliki 1.3, s kompleksno transformacijo $z = (z')^{\alpha/\pi}$, kjer so z' točke v polprostoru, z pa točke z območja na sliki 1.3. Ker funkcijo w, izraženo z z', že poznamo, enaka je $w(z') = v_o z'$, bomo funkcijo w, ki opisuje tok vode v ravnini območja med stenama (z), dobili tako, da bomo z' izrazili z z: $z' = z^{\pi/\alpha}$. Tako je

$$w(z) = v_o z^{\pi/\alpha} = v_o r^{\pi/\alpha}\left(\cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi + i\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right). \tag{1.30}$$

Funkciji ϕ in ψ se torej glasita $\phi = v_o r^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi$ in $\psi = v_o r^{\pi/\alpha}\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi$, hitrost pa ima naslednji komponenti $v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\pi}{\alpha}v_o r^{\pi/\alpha-1}\cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi$, $v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = -\frac{\pi}{\alpha}v_o r^{\pi/\alpha-1}\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi$. Bralca želimo opozoriti, da smo morali pred izvedbo konformnih preslikav z predelati v brezdimenzijsko obliko, sicer bi imeli težave z enotami.

Funkcija ψ je za $\alpha = \pi/2$ narisana na sliki 1.4.

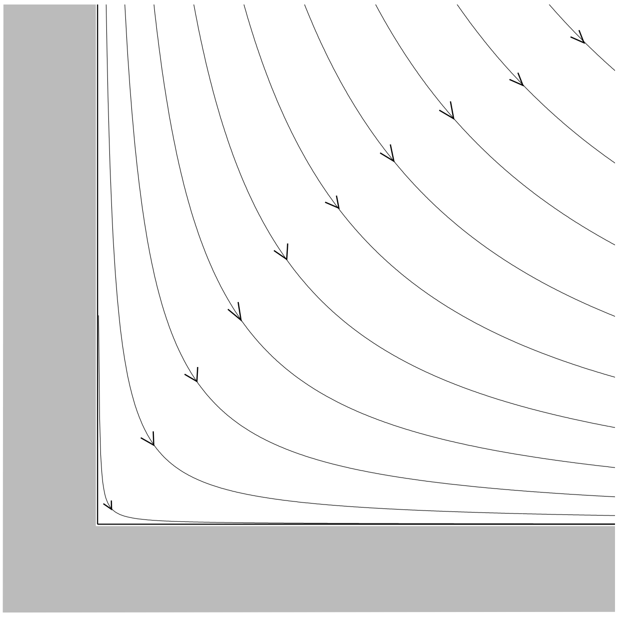
Primerjava enačb (1.29) in (1.30) nam pove, da smo pri reševanju z uvedbo kompleksnih funkcij konstante B_N že določili. Izbrali smo jih tako, da je v primeru $\alpha = \pi$ hitrost vode povsod ob površini stene konstantna.

Omenimo še to, da rešitev (1.30) ni smiselna za vse kote α. Pri $\pi/\alpha < 1$ namreč hitrost pri $r = 0$ divergira. V tem primeru moramo rešitev zapisati z enačbo (1.29).

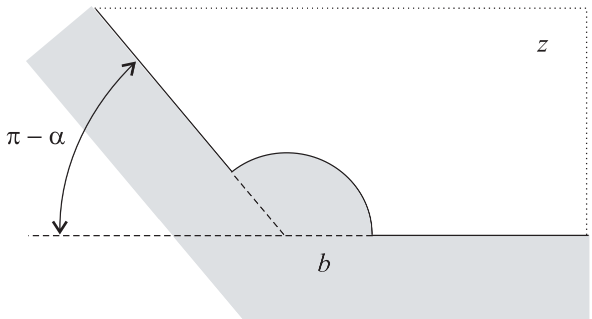
Naloga

Poiščimo še hitrostno polje vode ob steni, ki je narisana na sliki 1.5.

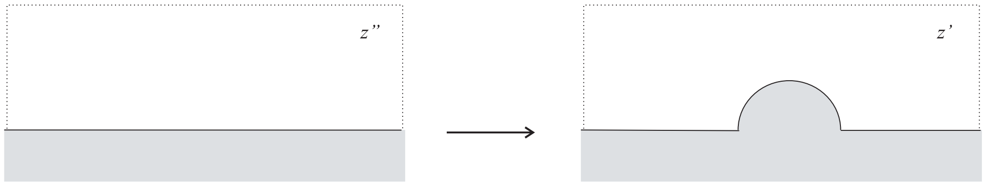
Pri zapisu funkcije $w(z)$ si bomo spet pomagali s transformacijami v kompleksni ravnini. Najprej bomo polprostor z'' preslikali v polprostor s krožnim izsekom z' (slika 1.6). Enačba, ki povezuje točke v polprostoru z'' s točkami v polprostoru z', se glasi $z'' = \left(z' + \frac{a^2}{z'}\right)$.



Slika 1.4: Tokovnice vode v območju med dvema stenama, ki oklepata kot $\pi/2$.



Slika 1.5: Tekočino omejujeta dve steni, ki oklepata kot α. Presečišče sten obdaja polkrožna izboklina s polmerom b.



Slika 1.6: Območje ob ravni steni preslikamo v polprostor s krožno izboklino.

Polprostor s krožnim izsekom pa preslikamo v območje na sliki 1.5 z enako transformacijo kot v prejšnjem primeru $z' = z^{\pi/\alpha}$.

Funkcijo $w(z'')$ za hitrostno polje ob ravni steni že poznamo: $w(z'') = az''$. Za območje na sliki 1.5 pa to funkcijo z zgoraj omenjenimi transformacijami preslikamo v

$$\begin{aligned} w(z) &= \phi(r,\varphi) + i\psi(r,\varphi) = \\ &= v_o z'' = \\ &= v_o\left(z' + \frac{a^2}{z'}\right) = \\ &= v_o(z^{\pi/\alpha} + a^2 z^{-\pi/\alpha}) \\ &= v_o(r^{\pi/\alpha} + a^2 r^{-\pi/\alpha})\cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi + iv_o(r^{\pi/\alpha} - a^2 r^{-\pi/\alpha})\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Zapišimo sedaj obe komponenti hitrosti

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\pi}{\alpha}v_o\left[r^{\pi/\alpha-1} - a^2 r^{-(\pi/\alpha+1)}\right]\cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi,$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = -\frac{\pi}{\alpha}v_o\left[r^{\pi/\alpha-1} + a^2 r^{-(\pi/\alpha+1)}\right]\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi.$$

Tokovnice opisuje enačba $(r^{\pi/\alpha} - a^2 r^{-\pi/\alpha})\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi = \text{konst.}$

Preverimo še, ali je hitrost povsod ob steni vzporedna z njo. Ob krožnem izseku velja

$$v_r(r = b = a^{\alpha/\pi}) = \frac{\pi}{\alpha}v_o\left[a^{\alpha/\pi\cdot\pi/\alpha}a^{-\alpha/\pi} - a^2 a^{-\alpha/\pi\cdot\pi/\alpha}a^{-\alpha/\pi}\right]\cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi = 0,$$

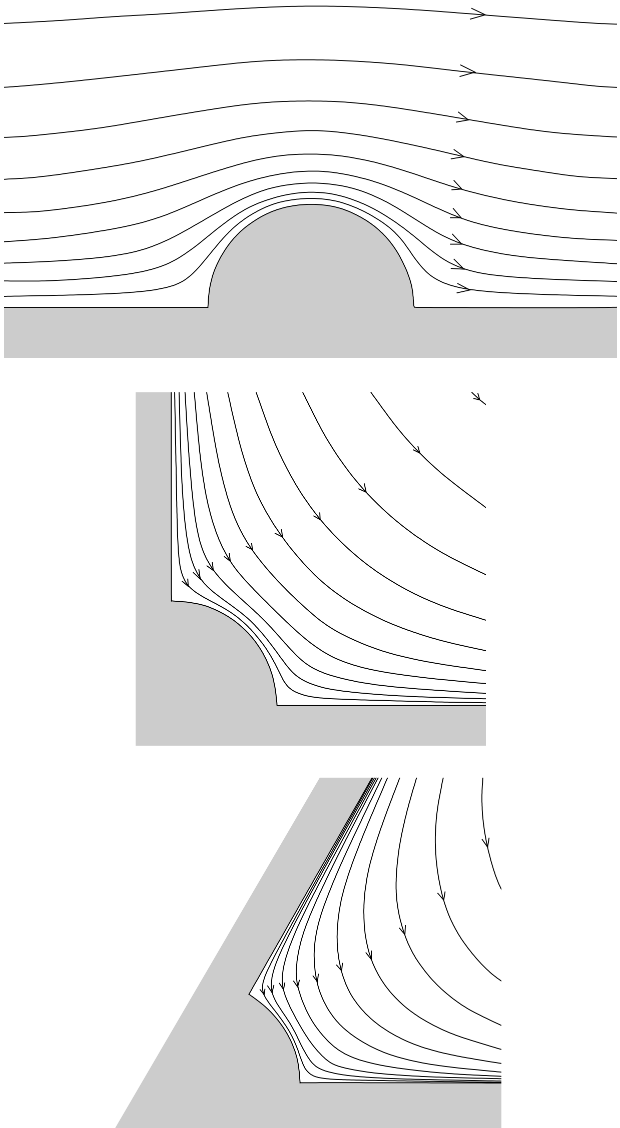
ob vodoravnem delu stene pa

$$v_\varphi(\varphi = 0) = v_\varphi(\varphi = \alpha) = 0.$$

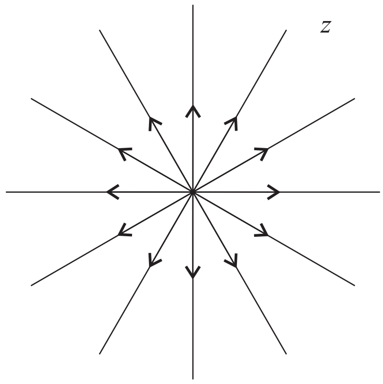
Na sliki 1.7 so narisane tokovnice.

V ravnini bi želeli s pomočjo kompleksnih funkcij opisati tudi izvore in ponore tekočine ter vrtince. Iskanja funkcije $w(z)$ za tak primer se bomo lotili s pomočjo namiga, ki pravi, da opišemo ponore s funkcijo $w(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln z$, vrtince pa s funkcijo $i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$. Preverimo najprej, kakšno hitrostno polje opisuje prva izmed funkcij:

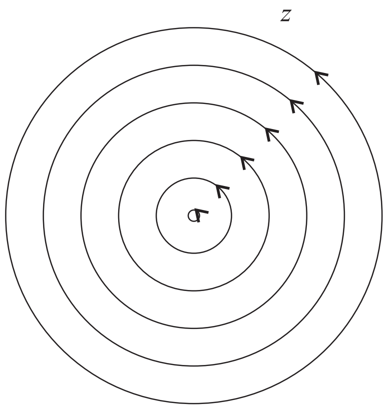
$$w(z) = \phi + i\psi = \frac{Q}{2\pi}\ln z = \frac{Q}{2\pi}\ln(re^{i\varphi}) = \frac{Q}{2\pi}\ln r + i\frac{Q}{2\pi}\varphi. \tag{1.32}$$



Slika 1.7: Tokovnice ob steni s polkrožno izboklino. V prvem primeru je $\alpha = \pi$, v drugem $\pi/2$ ter v tretjem $\pi/3$.



Slika 1.8: Tokovnice opisujejo točkast izvor tekočine.



Slika 1.9: Tokovnice vrtinca.

Tokovnice torej opisuje enačba $\varphi =$ konst.. Na sliki 1.10 jih prepoznamo po ježku. Hitrost pa ima komponenti

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}, \quad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0.$$

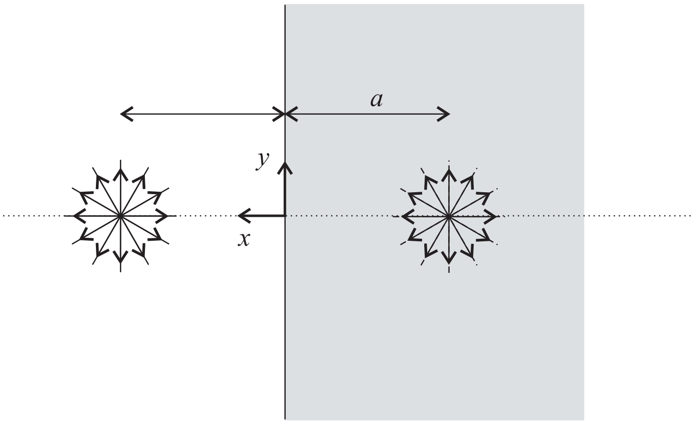
$w(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln z$ res opisuje izvor tekočine, oziroma njen ponor, če je Q negativen. Vprašajmo se še, kaj pomeni Q. Izračunajmo v ta namen pretok skozi krožnico z radijem r (enačba 1.27):

$$\psi_{2\pi} - \psi_0 = \frac{Q}{2\pi}\cdot 2\pi - Q\cdot 0 = Q.$$

Parameter Q torej opisuje ravno moč izvora.

Analizirajmo še funkcijo $w(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$:

$$w(z) = \phi + i\psi = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln re^{i\varphi} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\varphi + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r. \tag{1.33}$$



Slika 1.10: Točkast izvir je postavljen ob ravno steno. Razdalja med izvirom in steno je enaka a.

Tokovnice opisuje v tem primeru enačba $r =$ konst, kar je množica koncentričnih krogov. Izračunajmo hitrosti

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Funkcija w iz enačbe (1.33) opisuje torej vrtinec. Če je Γ pozitiven, kroži tekočina v smeri urinega kazalca.

Preverimo za vajo še to, ali sta ϕ in ψ iz enačbe (1.33) sploh rešitvi Laplaceove enačbe. Za funkcijo ϕ velja

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0,$$

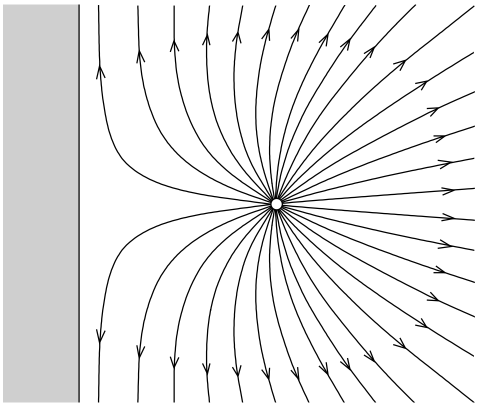
saj je ϕ linearno odvisna od φ in neodvisna od r. Tudi Laplace na ψ nam da nič.

Naloga

Znanje o zapisu izvirov bomo sedaj uporabili za izračun hitrosti in tokovnic vode, ki izvira iz točkastega izvira. Izvir je postavljen v bližino ravne stene, razdalja med izvirom in steno je enaka a (slika 1.10). Zanimalo nas bo, s kolikšno silo deluje izvir na steno.

Pri zapisu funkcije w bomo upoštevali, da je Laplace linearen operator in zato vsota ϕ-jev, ki rešijo enačbo $\Delta\phi = 0$, tudi reši to enačbo. Hkrati bomo uporabili še trik, ki ga poznamo že iz elektromagnetizma. Zahtevo, da mora biti hitrost vode ob steni vzporedna s steno, bomo namreč izpolnili tako, da bomo desno od stene postavili še en izvir. Ta ,,navidezni izvir" bo po velikosti enak realnemu. Funkcija w se torej glasi

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi}[\ln(z-a) + \ln(z+a)].$$



Slika 1.11: Tok tekočine, ki ga povzroči izvir ob ravni steni.

Izhodišče koordinatnega sistema smo izbrali v presečišču zveznice izvirov in stene. Upoštevajmo, da je $z = x + iy$, pa dobimo

$$
\begin{aligned}
w(z) &= \frac{Q}{2\pi}\left[\ln\left([(x-a)^2+y^2]^{1/2}\cdot e^{i\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x-a}}\right)+\right.\\
&\quad \left.+\ln\left([(x+a)^2+y^2]^{1/2}\cdot e^{i\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x+a}}\right)\right]=\\
&= \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\ln[(x-a)^2+y^2]+\frac{1}{2}\ln[(x+a)^2+y^2]+\right.\\
&\quad \left.+\,i\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x-a}+i\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x+a}\right].
\end{aligned}
$$

Izračunajmo sedaj hitrost:

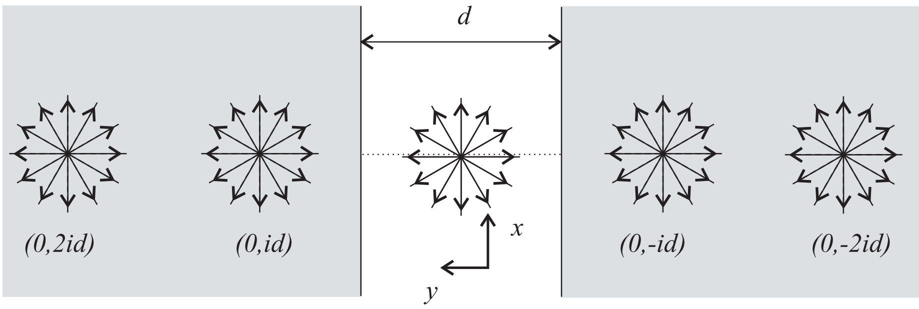
$$
v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi}\frac{(x-a)}{(x-a)^2+y^2}+\frac{Q}{2\pi}\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2},
$$

$$
v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{(x-a)^2+y^2}+\frac{Q}{2\pi}\frac{y}{(x+a)^2+y^2}.
$$

Iz zgornjih enačb sledi, da je pri $x = 0$ $v_x = 0$, v_y pa je enak $\frac{Q}{\pi}\frac{y}{a^2+y^2}$. Rezultat je smiseln, saj mora biti pri $x = 0$ hitrost vzporedna s površino. Prav tako je izpolnjena zahteva, da mora biti v_y enak nič pri $y = 0$. Na zgornji polravnini odteka voda namreč v smeri osi y, na spodnji polravnini pa v smeri $-y$. Pri $y = 0$ miruje. Tudi limito $v_y(y \to \infty) = 0$ lahko upravičimo. Zelo daleč stran od izvira voda skoraj miruje.

Zapišimo še tokovnice:

$$
\psi = \frac{Q}{2\pi}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x-a}+\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x+a}\right] = \text{konst.}
$$



Slika 1.12: Izvir tekočine je ujet med dve vzporedni steni.

Narisane so na sliki 1.11.

Izračunajmo še silo curka na steno. V ta namen moramo najprej izračunati tlak tekočine ob steni. Uporabili bomo Bernoullijevo enačbo $p_0 = p + \frac{1}{2}\rho v^2$, kjer je p_0 tlak zelo daleč stran od izvira. Tam je namreč hitrost tekočine enaka nič. Pri $x = 0$ torej velja $p = p_0 - \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 - \frac{1}{2}\rho v_y^2 = p_0 - \frac{1}{2}\rho \frac{Q^2}{\pi^2}\frac{y^2}{(a^2+y^2)^2}$. Sila na enoto dolžine je enaka vsoti prispevkov po vsej polravnini in je enaka

$$F_x = \int_{-\infty}^{\infty}(p - p_0)\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\rho\frac{Q^2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{(a^2+y^2)^2}\mathrm{d}y = -\frac{\rho Q^2}{4\pi a}. \tag{1.34}$$

Tlak p je pri vseh y manjši od tlaka v neskončnosti, zato izvir steno privlači. Isto nam pove predznak minus v zgornjem izrazu. Bralca želimo opozoriti še na to, da ima „sila“ v zgornjem izrazu enoto sile na dolžino. Celotno silo izvira dobimo tako, da izraz (1.34) pomnožimo z globino vode.

Naloga

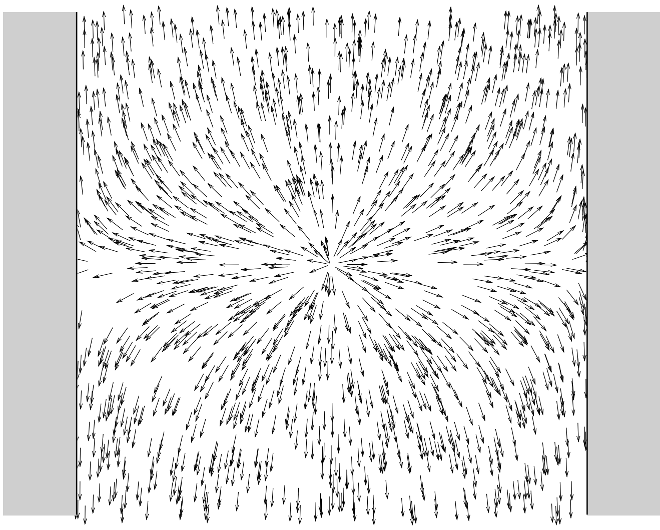
Za konec poglavja izračunajmo še hitrostno polje tekočine, ki izvira med dvema vzporednima stenama. Razdalja med njima naj bo d.

Spet si bomo pomagali s trikom iz elektromagnetizma. Robne pogoje bomo izpolnili tako, da bomo v območje za stenama dodali neskončno množico navideznih izvirov. Izviri bodo ležali v točkah $(0, id)$, $(0, 2id)$, $(0, 3id)\ldots$ ter $(0, -id)$, $(0, -2id)$, $(0, -3id)\ldots$ Funkcija $w(z)$ bo sestavljena iz prispevkov vseh teh izvirov,

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ln(z + ind) = \frac{Q}{2\pi}\ln \operatorname{sh}\frac{\pi z}{d}.$$

Vsoto zgornje vrste bo našel bralec v literaturi, na primer v knjigi Gradštejna in Ryžika.

Pri računanju komponent hitrosti bomo upoštevali, da je $w'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y} =$



Slika 1.13: Tok vode, ki ga povzroči izvir med dvema vzporednima stenama.

$v_x - iv_y$. Sledi:

$$w'(z) = v_x - iv_y = \frac{\pi}{d}\frac{Q}{2\pi}\frac{\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{z}d}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{z}d} = \frac{Q}{2d}\mathrm{cth}\frac{\pi z}{d}.$$

Spremenljivko z bomo izrazili s kartezičnimi koordinatami, $z = x + iy$. Zgornji izraz lahko preoblikujemo takole:

$$v_x - iv_y = \frac{Q}{2d}\frac{e^{\frac{\pi}{d}x+i\frac{\pi}{d}y} + e^{-\frac{\pi}{d}x-i\frac{\pi}{d}y}}{e^{\frac{\pi}{d}x+i\frac{\pi}{d}y} - e^{-\frac{\pi}{d}x-i\frac{\pi}{d}y}} = \frac{Q}{2d}\frac{e^{\frac{2\pi}{d}x+i\frac{2\pi}{d}y}+1}{e^{\frac{2\pi}{d}x+i\frac{2\pi}{d}y}-1} =$$

$$= \frac{Q}{2d}\frac{e^{\frac{4\pi x}{d}} - e^{\frac{2\pi x}{d}}2i\sin\frac{2\pi y}{d} - 1}{e^{\frac{4\pi x}{d}} - e^{\frac{2\pi x}{d}}2\cos\frac{2\pi y}{d} + 1}.$$

V drugi vrstici smo odpravili imaginarnost v imenovalcu. Sedaj že lahko preberemo komponenti vektorja hitrosti

$$v_x = \frac{Q}{2d}\frac{e^{\frac{4\pi x}{d}} - 1}{e^{\frac{4\pi x}{d}} - 2e^{\frac{2\pi x}{d}}\cos\frac{2\pi y}{d} + 1},$$

$$v_y = -\frac{Q}{d}\frac{e^{\frac{2\pi x}{d}}\sin\frac{2\pi y}{d}}{e^{\frac{4\pi x}{d}} - 2e^{\frac{2\pi x}{d}}\cos\frac{2\pi y}{d} + 1}.$$

Komponenta hitrosti y je tik ob površini enaka nič, tako kot smo pričakovali. Hitrostno polje v bližini izvira je predstavljeno na sliki 1.13.

Naloga

Izračunajmo še tok vode ob vrtečem se valju.

Reševanja se bomo spet lotili v kompleksnem. Funkcijo $w(z)$ bomo v tem primeru sestavili iz prispevka, ki opisuje tok vode okrog cilindra z radijem a (enačba 1.31) ter vrtinca,

$$w(z) = v_0(z + \frac{a^2}{z}) + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z.$$

Če izrazimo spremenljivko z s polarnimi koordinatami r in φ, sledi

$$w(z) = v_0\left(re^{i\varphi} + \frac{a^2}{r}e^{-i\varphi}\right) + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln re^{i\varphi} =$$

$$v_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi + i\left[v_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r\right].$$

Realni del $w(z)$ predstavlja funkcijo $\phi(r,\varphi)$, imaginarni pa funkcijo $\psi(r,\varphi)$. Bralec lahko takoj opazi, da je $\psi(r = a)$ neodvisen od φ. To pa pomeni, da poteka tokovnica po površini valja. Izračunajmo še tangencialno komponento hitrosti ob površini valja:

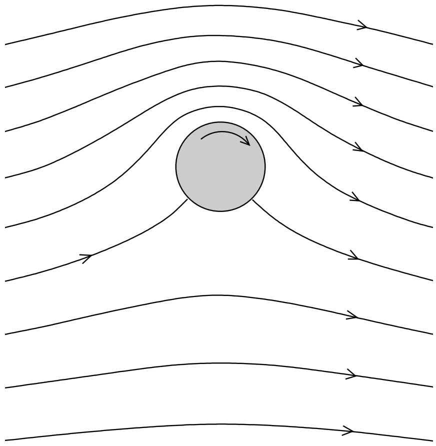
$$v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = -v_0\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

$$v_\varphi(r = a) = -2v_0\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi a}.$$

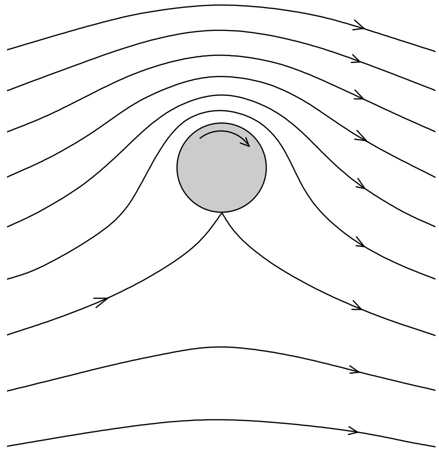
Točke, v katerih je v_φ enaka nič, imenujemo *stagnacijske točke*.

$$v_\varphi(r = a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin\varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi v_0 a}.$$

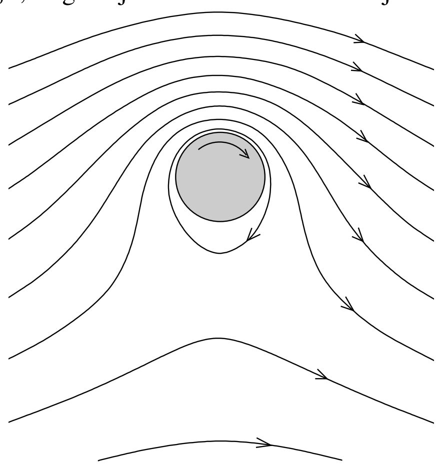
Če je $\Gamma < 4\pi v_o a$, obstajata ob površini dve stagnacijski točki.



Pri $\Gamma = 4\pi v_0 a$ je točka samo ena.



Kadar pa je $\Gamma > 4\pi v_0 a$, stagnacijskih točk ni in tok vode je videti takole



Izračunajmo še tlak na tak cilinder. Uporabili bomo enačbo (1.34), v kateri bomo upoštevali, da je tok vode stacionaren in je v_0 hitrost vode daleč od valja. Tlak vode je tako enak

$$p(a,\varphi) - p_o = \tfrac{1}{2}\varrho(v_0^2 - v^2) = \tfrac{1}{2}\varrho\left(v_0^2 - (v_r^2 + v_\varphi^2)\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\varrho v_0^2\left(1 - \left(2\sin\varphi + \tfrac{\Gamma}{2\pi v_0 a}\right)^2\right).$$

Komponento sile na dolžinsko enoto, ki kaže v smeri gibanja tekočine daleč stran od valja, imenujemo *upor*. Pri vrtečem se valju je enak

$$\begin{aligned} f_u &= \int_0^{2\pi} p\, a \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{2}\varrho v_0^2 a \left[\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 v_0^2 a^2}\right)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi - \right. \end{aligned}$$

$$-\int_0^{2\pi}\frac{2\Gamma}{\pi v_0 a}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi-\int_0^{2\pi}4\sin^2\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\Bigg]=0.$$

Komponento sile na dolžinsko enoto, ki je pravokotna na F_u, pa imenujemo *silo dviga*.

$$f_d=\int_0^{2\pi}pa\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\varrho v_0^2 a\left[\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 v_0^2 a^2}\right)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi-\int_0^{2\pi}\frac{2\Gamma}{\pi v_0 a}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi-\int_0^{2\pi}4\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\varrho v_0^2 a\frac{2\Gamma}{\pi v_0 a}\left(-\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-\varrho v_0\Gamma.$$

Negativen predznak v zgornjem izrazu pomeni, da deluje sila navzgor, saj kaže sila tlaka od površine proti središču valja, mi pa smo od celotne sile izluščili samo njeno navpično komponento.

Z rezultati obravnavanega modela lahko razložimo tudi pojave iz vsakdanjega okolja. Primer, ko leti žogica po zraku in ima hitrost zaradi vrtenja na zgornji strani žogice isto smer kot hitrost gibanja težišča, to pomeni nasprotno smer kot gibanje tekočine mimo kroglice, opišemo z $-\Gamma$ v zgornjem modelu. Sila dviga deluje v tem primeru navzdol. Nad športi navdušen bralec je ta pojav gotovo že opazil. Pri tenisu, na primer, pade zarezana žoga (top spin) v nasprotnikovo polje bliže mreži kot žogica, ki se ne vrti.

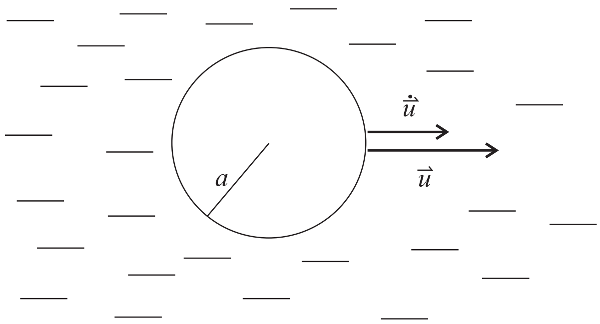
1.3 Trirazsežni primeri

Naloga

Toga kroglica z radijem a se pospešeno giblje v nestisljivi in neviskozni tekočini. S kolikšno silo deluje tekočina na kroglico, če sta hitrost in pospešek med seboj vzporedna in enaka u oziroma $\dot{u}$? Kroglica se ne vrti.

Hitrost gibanja tekočine bomo zapisali v krogelnih koordinatah in zasukali koordinatni sistem tako, da bo smer hitrosti označeval kot $\vartheta=0$, izhodišče koordinatnega sistema pa bo v središču kroglice. Kroglica se bo glede na izhodišče koordinatnega sistema gibala s hitrostjo u. Nato bomo hitrost izrazili s potencialom ϕ, $\mathbf{v}=\nabla\phi$, saj imamo opravka z nestisljivo tekočino in zato iz kontinuitetne enačbe sledi, da je $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$. Potencial ϕ je zato rešitev enačbe (1.24) $\Delta\phi=0$. V splošnem zapišemo rešitev te enačbe v krogelni geometriji s sfernimi harmoniki in potenčno vrsto po r

$$\phi(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\,(A_l r^l+B_l r^{-l-1}).$$



Slika 1.14: Toga kroglica se pospešeno giblje v nestisljivi in neviskozni tekočini.

Sferne harmonike po navadi izrazimo z bolj domačimi Legendrovimi polinomi:

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \propto \begin{array}{ll} P_{lm}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}, & m \neq 0, \\ P_l(\cos\vartheta)(G\varphi + H), & m = 0. \end{array}$$

V našem primeru bodo konstante A_l enake nič, saj je hitrost tekočine daleč stran od središča krogle enaka nič. Konstante B_l pa bomo določili iz pogoja, da mora biti na površini kroglice, pri $r = a$, hitrost tekočine v smeri, ki je pravokotna na površino, ravno enaka projekciji $\mathbf{u}$ na smerni vektor v tej smeri. Omenjeni pogoj zapišemo kot

$$v_r(r=a) = \frac{\partial\phi}{\partial r}(r=a) = u\cos\vartheta = \mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}, \tag{1.35}$$

kjer je $\hat{\mathbf{n}}$ enotski vektor, ki je pravokoten na površino. Pri določanju konstant bomo upoštevali še simetrijo problema. Hitrostno polje se s kotom φ ne spreminja, prav tako pa tudi ni razloga, da bi bila komponenta hitrosti v smeri vektorja $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ različna od nič:

$$v_\varphi(r=a) = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(r=a) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ in } G = 0. \tag{1.36}$$

Upoštevajoč pogoja (1.35) in (1.36) zapišemo potencial

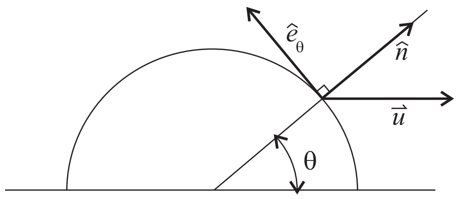
$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = -\frac{a^3}{2}\frac{u\cos\vartheta}{r^2} = -\frac{a^3}{2}\frac{\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{r^2}. \tag{1.37}$$

V zgornjem izrazu smo $\cos\vartheta$ izrazili s skalarnim produktom vektorjev $\mathbf{u}$ in $\hat{\mathbf{n}}$ zato, da bodo v nadaljevanju izračuni bolj enostavni. Zapišimo še hitrost gibanja tekočine,

$$\mathbf{v} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\hat{\mathbf{e}}_\vartheta = \frac{a^3}{r^3}u\left(\hat{\mathbf{n}}\cos\vartheta + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{e}}_\vartheta\sin\vartheta\right). \tag{1.38}$$

Zgornji izraz bomo namesto s smernim vektorjem $\hat{\mathbf{e}}_\vartheta$ izrazili raje z vektorjema $\hat{\mathbf{n}}$ in $\mathbf{u}$. Pri tem bomo upoštevali, da povezuje $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{e}}_\vartheta$ in $\mathbf{u}$ enačba (glej sliko 1.15)

$$\mathbf{u} = u(\hat{\mathbf{n}}\cos\vartheta - \hat{\mathbf{e}}_\vartheta\sin\vartheta).$$



Slika 1.15: Zveza med vektorji $\hat{\mathbf{n}}$ in $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ ter $\mathbf{u}$.

Če vstavimo $u\hat{\mathbf{e}}_\vartheta \sin\vartheta$ iz zgornje enačbe v enačbo (1.38), dobimo

$$\mathbf{v} = \frac{a^3}{2r^3}(3(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{u}). \tag{1.39}$$

Za izračun sile, ki deluje na kroglico, moramo najprej poiskati tlak tekočine ob površini kroglice. Tega lahko določimo iz predelane Eulerjeve enačbe (1.28),

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho} \tag{1.40}$$

Zapišimo najprej krajevno odvisna prispevka. Iz enačbe (1.39) sledi, da je $|\mathbf{v}|^2$ enaka

$$v^2 = \frac{a^6}{4r^6}(9(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 - 6(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 + u^2) = \frac{a^6}{4r^6}(3(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 + u^2). \tag{1.41}$$

V zgornjem izrazu smo upoštevali, da je $\hat{\mathbf{n}}$ enotski vektor. Parcialni odvod potenciala po času bomo izračunali tako, da bomo najprej poiskali totalni odvod ϕ-ja po času:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot(\nabla\phi).$$

Upoštevali bomo še to, da se potencial ob površini spreminja le v tedaj, ko se spreminja hitrost gibanja kroglice in je zato $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}$. Zato lahko zapišemo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}\cdot(\nabla\phi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}} - v^2 = \\ &= -\frac{a^3}{2r^2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{u}} - \frac{a^6}{4r^6}(3(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 + u^2).\end{aligned} \tag{1.42}$$

Iz enačb (1.40), (1.41) in (1.42) sledi, da ima tlak ob površini kroglic vrednost

$$\frac{p}{\varrho}(r=a) = \frac{p_0}{\varrho} - \frac{1}{8}(3(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 + u^2) + \frac{a}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{4}(3(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 + u^2) =$$

$$= \frac{p_0}{\varrho} + \frac{3}{8}(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{u^2}{8} + \frac{a}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{u}} = \frac{p_0}{\varrho} + \frac{u^2}{8}(3\cos^2\vartheta + 1) + \frac{a}{2}\dot{u}\cos\vartheta.$$

Pri izračunu sile bomo uporabili enačbo (**??**) $\frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}t} = -\oint \Pi_{ik}\mathrm{d}S_k$ in upoštevali, da je odvod gibalne količine po času enak sili na kroglico. Izračunali bomo samo komponento sile v smeri gibanja kroglice, bralcu pa prepuščamo, da sam ugotovi, kolikšna je velikost drugih komponent. Iz enačb (**??**) in (**??**) torej sledi

$$F_z = -\oint [p(\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \varrho e_z(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})]\mathrm{d}S,$$

$$F_z = -\oint p(\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathrm{d}S - \oint \varrho(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathrm{d}S = -\oint p(\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathrm{d}S.$$

V zgornjem izrazu smo upoštevali, da je hitrost tekočine povsod na površini vzporedna z njo in je zato člen, ki vsebuje skalarni produkt $\mathbf{v}$-ja in $\hat{\mathbf{n}}$-ja, enak nič.

Če upoštevamo, da oklepata vektorja $\hat{\mathbf{e}}_z$ in $\mathrm{d}\mathbf{S}$ kot ϑ, zapišemo komponento sile v smeri gibanja kroglice takole:

$$F_z = \int_0^\pi p \cos\vartheta 2\pi a^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^\pi \left(p_0 + \frac{\varrho u^2}{8}\right) \cos\vartheta 2\pi a^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta + \varrho \frac{3u^2}{8} \int_0^\pi 2\pi a^2 \cos^3\vartheta \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta +$$

$$+ \frac{\varrho a}{2} \dot{u} \int_0^\pi 2\pi a^2 \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \varrho \pi a^3 \dot{u} \frac{2}{3} = \frac{\dot{u}}{2} \frac{4\pi a^3}{3} \varrho = \frac{\dot{u}}{2} M.$$

Sila na kroglico je torej od nič različna samo tedaj, ko se giblje kroglica pospešeno. V tem primeru je sorazmerna z maso izpodrinjene tekočine (M) ter s pospeškom kroglice. Morda bi bralec pričakoval, da bo sila od nič različna tudi pri enakomernem gibanju. Vzrok takemu pričakovanju je viskoznost, ki smo jo v našem računu zanemarili, za večino realnih tekočin pa ni zanemarljiva.

2. Viskozne tekočine

Splošen izraz za gibanje viskoznih tekočin je *Navier-Stokesova* enačba

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p+\eta\nabla^2\vec{v}.$$

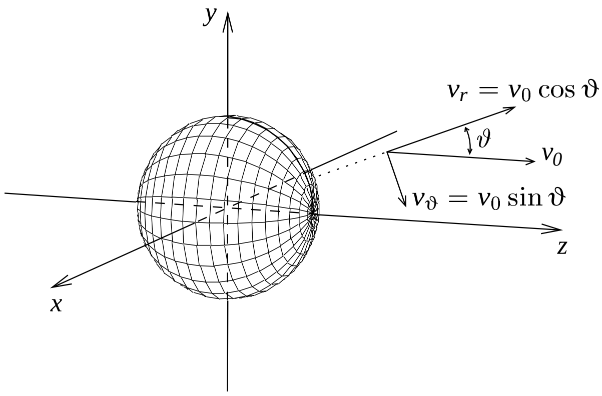
Stokesov približek obravnavo poenostavi, saj privzame, da so hitrosti majhne in njihova časovna odvisnost zanemarljiva ter da so tekočine nestisljive, $0=\vec{\nabla}\vec{v}$, torej

$$0=-\vec{\nabla}p+\eta\nabla^2\vec{v}.$$

Za viskozne tekočine velja tudi robni pogoj, da je hitrost na površini enaka nič.

Naloga

Trda kroglica s polmerom a stoji v tekoči nestisljivi tekočini z viskoznostjo η. Daleč stran od kroglice teče tekočina v smeri osi z s hitrostjo v_0. S kolikšno silo deluje viskozna tekočina na kroglico? (Stokesov problem)



Slika 2.1: Trda kroglica stoji v tekoči viskozni tekočini.

Rešitev bomo poiskali s pomočjo Navier-Stokesove enačbe, ki ima za nestisljive viskozne tekočine obliko

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\eta}{\rho}\triangle\vec{v}\,. \tag{2.1}$$

V enačbi bomo zanemarili člene $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ in $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ ter tako predpostavili, da sta hitrost in s tem Reynoldsovo število majhna. Naša rešitev problema predstavlja torej najnižji red v razvoju lokalne hitrosti tekočine po Reynoldsovem številu. Osnovni enačbi toka tekočine lahko torej zapišemo kot

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} \quad \text{in} \\ & \nabla\vec{v} = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kjer je $\mu = \frac{\eta}{\rho}$. Prvi enačbi pravimo tudi Stokesova enačba.

Naša naloga bo torej iz enačb (2.2) določiti hitrostno polje ter tlak tekočine v bližini kroglice. Kot bomo videli, nas bo potem do sile ločil samo še korak.

Glede na polarno simetrijo problema (okoli osi z) ima hitrost tekočine samo dve komponenti, odvisni le od oddaljenosti od središča kroglice (r) in azimutnega kota θ, $\vec{v}(\vec{r}) = (v_r(r,\theta), v_\theta(r,\theta), 0)$. Rešitev Stokesove enačbe mora zadoščati tudi dvema robnima pogojema. Daleč stran od kroglice mora biti hitrost tekočine enaka

$$\vec{v}(r\to\infty,\theta) = (v_0\cos\theta, -v_0\sin\theta, 0), \tag{2.3}$$

na površini kroglice pa mora veljati, da sta komponenti hitrosti pravokotno na površino ter vzporedno z njo enaki nič,

$$\vec{v}(r=a,\theta) = 0.$$

Komponenti hitrosti bomo poiskali s trikom, ki ga je predlagal Stokes. Izrazili ju bomo namreč z neko novo funkcijo ψ, in sicer takole:

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{2.4}$$

Druga izmed enačb (2.2) je s takim nastavkom že izpolnjena, saj je

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{v} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r} - \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} = 0. \end{aligned}$$

V zgornjem izrazu smo upoštevali zapis operatorja divergence v sferičnih koordinatah $\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$. Nastavka (2.4) sta izbrana tako, da je tudi

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\psi = v_r\frac{\partial\psi}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = 0,$$

kar pomeni, da je gradient ψ pravokoten na hitrost. Kot smo se naučili v poglavju o idealnih tekočinah v dveh dimenzijah, pa to pomeni, da enačba $\psi =$ konst. določa tokovnico. Analogijo s tokovi v dveh dimenzijah smemo uporabiti zato, ker je Stokesov problem pravzaprav dvodimenzionalen, saj je hitrost odvisna zgolj od dveh koordinat v primerno izbranem koordinatnem sistemu.

Poglejmo še, kaj dobimo za $\nabla\times\vec{v}$. Upoštevajmo izraz za rotor v sferičnih koordinatah $\nabla\times\vec{v} = \left(\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}), \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi), \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta})\right)$ in zapišimo:

$$\nabla\times\vec{v} = \left(0, 0, -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right) = \left(0, 0, -\frac{1}{r\sin\theta}E^2\psi\right), \tag{2.5}$$

kjer smo vpeljali diferencialni operator E^2 kot

$$E^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right).$$

Če upoštevamo, da imamo opraviti z nestisljivo tekočino, lahko prepišemo prvo izmed enačb (2.2) v obliko

$$\nabla p = \mu\nabla^2\vec{v} = \mu\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = -\mu\nabla\times(\nabla\times\vec{v}).$$

Upoštevali smo, da je $\nabla^2 = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$ ter da je $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$. Upoštevajoč izraz za $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ (2.5), lahko zgornjo enačbo prepišemo v

$$\begin{aligned}\nabla p &= -\mu\nabla\times\left(0, 0, -\frac{1}{r\sin\theta}E^2\psi\right) = \\ &= \mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{1}{r\sin\theta}E^2\psi\right), -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{r\sin\theta}E^2\psi\right), 0\right).\end{aligned}$$

Vrnimo se sedaj k enačbi (2.2) in upoštevajmo (2.4). Tako že lahko zapišemo za obe komponenti gradienta tlaka enačbi

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}E^2\psi \qquad \text{in}$$

$$\frac{\partial p}{r\partial\theta} = -\frac{\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}E^2\psi. \tag{2.6}$$

Ko ju križno odvajamo in odštejemo, dobimo zvezo

$$0 = \frac{\partial^2 p}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial^2 p}{\partial\theta\partial r} = \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}E^2\psi\right) + \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}E^2\psi\right) =$$

$$= \frac{\mu}{\sin\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}E^2\psi + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}E^2\psi\right)\right)$$

oziroma v končni obliki, če upoštevamo še definicijo operatorja E^2,

$$E^2E^2\psi = 0. \tag{2.7}$$

Enačbo (2.2) smo tako predelali v precej bolj enostavno obliko.

Zgornjo enačbo moramo rešiti pri robnih pogojih

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}(r=a,\theta)=\frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(r=a,\theta)=0, \tag{2.8}$$

saj mora biti hitrost tekočine na površini kroglice enaka nič. Robni pogoj (2.3), ki opisuje hitrost tekočine daleč od kroglice, pa nam da za ψ enačbo

$$\psi(r\longrightarrow\infty,\theta)=\frac{1}{2}v_0r^2\sin^2\theta.$$

Zato bomo predpostavili, da se da splošno rešitev zapisati v obliki

$$\psi(r,\theta)=f(r)\sin^2\theta, \tag{2.9}$$

kjer mora biti $f(r)$ za velike r enaka$\frac{1}{2}v_0r^2$, veljati pa mora tudi zveza $f(a)=f^{'}(a)=0$. Upoštevajoč nastavek (2.9) lahko izračunamo

$$E^2\psi=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{2\,f}{r^2}\right)\sin^2\theta.$$

Enačbo (2.7) lahko torej zapišemo v obliki, ki vsebuje le še funkcijo $f(r)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\right)^2 f(r)=0. \tag{2.10}$$

Problem iskanja hitrostnega polja smo si tako precej poenostavili, saj je zgornja enačba homogena v r in lahko zato iščemo rešitve z nastavkom

$$f(r)=Cr^{\alpha}.$$

Če vstavimo nastavek v enačbo (2.10), lahko preberemo

$$E^2\psi=Cr^{\alpha-2}(\alpha(\alpha-1)-2)\sin^2\theta \text{ ter}$$

$$E^2E^2\psi=Cr^{\alpha-4}((\alpha-2)(\alpha-3)-2)(\alpha(\alpha-1)-2)\sin^2\theta=0.$$

Torej mora biti

$$((\alpha-2)(\alpha-3)-2)(\alpha(\alpha-1)-2)=0.$$

Zgornja enačba ima rešitve

$$\alpha=-1,\quad \alpha=1,\quad \alpha=2\quad \text{in}\quad \alpha=4,$$

zato zapišemo $f(r)$ kot linearno kombinacijo

$$f(r)=\frac{A}{r}+Br+Cr^2+Dr^4.$$

Iz pogoja, da mora biti v neskončnosti $f(r)$ enak $\frac{1}{2}v_or^2$, sledi, da je

$$C=\frac{1}{2}v_0\quad \text{in}\quad D=0,$$

konstanti A in B pa dobimo iz robnih pogojev na površini krogle (2.8):

$$f(a) = f'(a) = 0.$$

Tako velja

$$\begin{aligned} \frac{A}{a} + Ba + \frac{1}{2}v_0 a^2 = 0 \quad \text{in} \\ -\frac{A}{a^2} + B + v_0 a = 0. \end{aligned}$$

Upoštevajoč vrednosti konstant A, B, C in D ter nastavek (2.9) lahko končno zapišemo

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{4}v_0\left(2r^2 + \frac{a^3}{r} - 3ar\right)\sin^2\theta.$$

Iz enačbe (2.6) bomo izračunali še gradient tlaka, zato najprej izračunajmo $E^2\psi$,

$$E^2\psi = \left(f'' - \frac{2f}{r^2}\right)\sin^2\theta = \frac{3}{2}\frac{av_0}{r}\sin^2\theta.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\mu}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}E^2\psi = \frac{2\mu\cos\theta}{r^2}\frac{3}{2}\frac{av_0}{r} = \frac{3av_0}{r^3}\cos\theta \qquad \text{in} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} &= \frac{-\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}e^2\psi = \frac{\mu\sin^2\theta}{\sin\theta}\frac{3av_0}{2r^2} = \frac{3av_0}{2r^3}\sin\theta. \end{aligned}$$

Z integriranjem zgornjih enačb dobimo

$$p = p_0 - \frac{3av_0}{2r^2}\cos\theta.$$

Da bi določili silo na kroglico, bomo v naslednjem koraku izračunali komponente napetostnega tenzorja. S hitrostjo in tlakom jih bomo povezali s pomočjo enačbe

$$\mathsf{p}_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right),$$

ki se v sferičnih koordinatah glasi

$$\begin{aligned} \mathsf{p}_{rr} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad \text{kjer je} \qquad v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \\ \mathsf{p}_{r\theta} &= \mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_r}{r}\right) + \frac{\mu}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}, \qquad \text{kjer je} \qquad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \\ \mathsf{p}_{r\varphi} &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Celotno silo na kroglo dobimo z integralom napetostnega tenzorja po površini,

$$F_i = \oint \mathsf{p}_{ik}n_k\,dS, \qquad \vec{n} = (0,1,0).$$

Za silo v smeri hitrosti v_0 velja

$$F_{v_0} = \oint (\mathsf{p}_{ik} n_k) \frac{v_{0i}}{v_0}\, dS,$$

kjer je (slika 2.1)

$$\frac{v_{0r}}{v_0} = \cos\theta \qquad \text{ter} \qquad \frac{v_{0\theta}}{v_0} = -\sin\theta.$$

Če upoštevamo zgornji izraz ter dejstvo, da je le $n_r \neq 0$, lahko zapišemo

$$F_{v_0} = \oint \mathsf{p}_{ir} \frac{v_{0i}}{v_0}\, dS = \oint (\mathsf{p}_{rr}\cos\theta - \mathsf{p}_{\theta r}\sin\theta)\, dS =$$

$$= \oint \left(\frac{3\mu v_0}{2a} \cos^2\theta + \frac{3\mu v_0}{2a} \sin^2\theta \right) a^2\, d\Omega = 6\pi a \mu v_0.$$

V zgornji izpeljavi smo upoštevali naslednje izraze za komponente napetostnega tenzorja:

$$\mathsf{p}_{rr}(r=a) = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{3 a v_0}{a^2}\cos\theta + 2\mu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(r)}{r^2 \sin\theta} 2\sin\theta \right),$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{p}_{r\theta} &= -\mu a \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2\sin\theta} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{f 2\sin\theta\cos\theta}{r^2\sin\theta} \right) = \\
&= -\mu a \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r} \right)\bigg|_{r=a} - \frac{\mu^2}{r^3}\, f\sin\theta|_{r=a} = \\
&= -\frac{\mu a \sin\theta}{a^2} f''(r=a) = -\frac{\mu}{a}\frac{3}{2} v_0 \sin\theta.
\end{aligned}$$

Izračunali smo jih iz (2.11).

Sila na kroglico, ki miruje v viskozni tekočini, je torej enaka $6\pi a \mu v_0$.

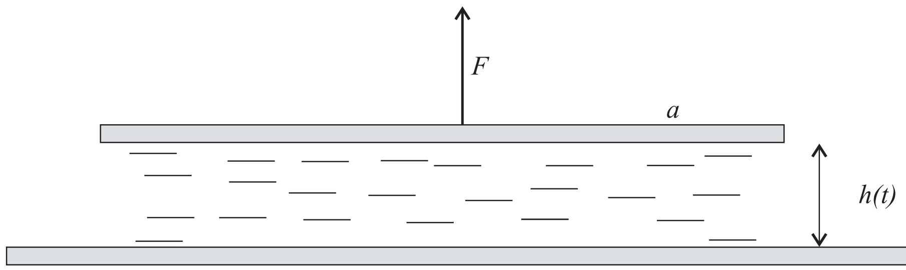
Naloga

Med steno in pomičnim diskom z radijem a, ki sta na razdalji h ($\frac{h}{a} \ll 1$), se nahaja nestisljiva viskozna tekočina. Kolikšna sila deluje med steno in diskom, če ju vlečemo narazen (ali pa porivamo skupaj) s hitrostjo $\dot{h}$. (Stefanova sila)

Rešitev bomo poiskali s pomočjo Navier-Stokesove enačbe (2.1), v kateri bomo zanemarili člene $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ in $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$. Predpostavili bomo torej, da sta hitrost in s tem Reynoldsovo število majhna. Pokazati se da, da je takšen približek konsistenten, če je le $\frac{h}{a} \ll 1$.

Vzemimo os z pravokotno na steno in disk. Osnovni enačbi toka tekočine lahko torej zapišemo kot

$$\begin{aligned}
0 &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}, \\
\nabla \cdot \vec{v} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.12}$$



Slika 2.2: Prostor med krožnim diskom in ravno steno zapolnjuje viskozna tekočina. Ploščo vlečemo proč od stene.

kjer je $\mu = \frac{\eta}{\rho}$. Ker so tipične razdalje v smeri z po predpostavki veliko manjše kot v radialni smeri, so gradienti v tej smeri bistveno večji kot v radialni smeri, zato lahko uporabimo približek $\nabla^2 \simeq \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Osnovne enačbe toka tekočine med steno in diskom tako postanejo

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla p + \mu \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}, \\ & \nabla \cdot \vec{v} = 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

skupaj z robnim pogojem, da je $\vec{v} = 0$ na površini stene in na površini diska. Te enačbe opisujejo tok močno viskozne tekočine v tanki plasti. Ker se debelina plasti tekočine s časom spreminja, $h = h(t)$, privzamemo za hitrost nastavek

$$\vec{v} = (v_r(r,z,t), 0, v_z(r,z,t)).$$

Glede na to, da je sloj tekočine zelo tanek, je p do najnižjega reda zgolj funkcija r in t. Tako dobimo za $p(r,t)$ enačbo

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}.$$

Če to enačbo dvakrat integriramo po z in upoštevamo robni pogoj $v_r = 0$ pri $z = 0$ in $z = h(t)$, potem dobimo

$$v_r = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-h).$$

Pogoj za nestisljivost $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ lahko v našem primeru zapišemo v obliki

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Če sedaj v zgornji izraz vstavimo že izračunano v_r, integriramo po z in upoštevamo robni pogoj $v_z = 0$ pri $z = 0$, potem dobimo

$$v_z = -\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left(\frac{z^3}{3} - \frac{h z^2}{2} \right).$$

Robni pogoj na površini diska $v_z = \frac{dh(t)}{dt}$ pri $z = h(t)$ potem zahteva, da je

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{12\mu r}{h^3}\,\frac{dh(t)}{dt}.$$

Če to zvezo sedaj integriramo dvakrat po r, dobimo

$$p = \frac{3\mu}{h^3}\,\frac{dh(t)}{dt}\,r^2 + C(t)\ln r + D(t).$$

Da se izognemo singularnosti pri $r = 0$, mora biti $C(t) = 0$. Če sedaj upoštevamo še, da mora biti pri zunanjem robu diska $r = a$ tlak enak zunanjemu atmosferskemu ali tekočinskemu tlaku p_0, potem na koncu dobimo

$$p(r,t) - p_0 = \frac{3\mu}{h^3}\,\frac{dh(t)}{dt}\,\left(r^2 - a^2\right).$$

Silo, ki deluje na disk, sedaj izračunamo z integralom tlačne razlike po njegovi površini, torej je

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^a (p(r,t) - p_0) r\,dr\,d\phi = -\frac{3\pi}{2}\frac{\mu a^4}{h^3}\,\frac{dh(t)}{dt}.$$

Sila je negativna, kar je seveda povsem pravilno. Če namreč disk vlečemo stran od stene, torej če je $\frac{dh(t)}{dt} > 0$, potem se mora tekočina temu upirati in obratno. Sila je lahko, pač v odvisnosti od h, zelo velika, če je le h zadosti majhen. Prvi jo je izračunal J. Stefan leta 1874 in se po njem tudi imenuje.

Če Stefanovo silo postavimo sedaj v Newtonov zakon za disk, bomo dobili odvisnost $h(t)$ in s tem tudi čas, ki je potreben za to, da vso tekočino med diskom in steno izrinemo ven. Izračunajte ga!

Na koncu preverimo še to, ali sta člena $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ in $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ res zanemarljiva. V mislih bomo imeli, da so osnovni parametri sistema $a, h, \frac{dh(t)}{dt}$ in μ, za katere velja $\frac{h}{a} \ll 1$.

Tipična hitrost tekočine je velikostnega reda $\frac{dh(t)}{dt}$, zato lahko ocenimo

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} \sim \frac{\dot{h}}{a}\dot{h},$$

$$\mu\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2} \sim \mu\frac{\dot{h}}{h^2}.$$

Če vpeljemo ustrezno Reynoldsovo število kot $Re = \frac{\dot{h}a}{\mu}$, sledi zveza

$$\frac{(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}}{\mu\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2}} \sim Re\cdot\left(\frac{h}{a}\right)^2 \ll 1,$$

kar za močno viskozne tekočine upravičuje našo predpostavko z začetka naloge. Člen $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ lahko torej v Navier-Stokesovi enačbi zares zanemarimo. Členu $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ se godi podobno. Ocenimo spet na isti način,

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \sim \frac{\dot{h}}{T},$$

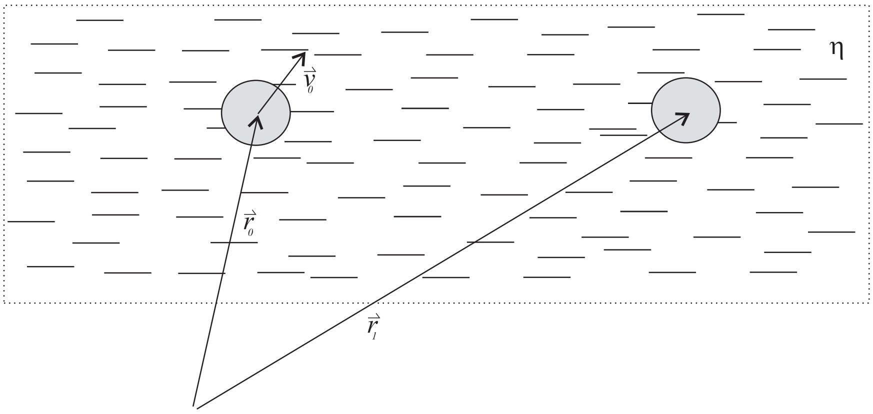
kjer je T neki tipični čas, v katerem tekočina od sredine diska pride do njegovega roba. Ta bo enak približno $T \sim \frac{a^2}{\mu}$ in bomo torej imeli

$$\frac{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}{\mu \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}} \sim \left(\frac{h}{a}\right)^2 \ll 1.$$

Predpostavke našega računa so torej popolnoma upravičene.

Naloga

V tekočini z viskoznostjo η sta nahajata dve kroglici s polmerom a. Lego prve označuje krajevni vektor $\vec{r}_0$, lego druge pa vektor $\vec{r}_1$. Prvo kroglico potiskamo s hitrostjo $\vec{v}_0$. Kakšno hitrostno polje se kot posledica gibanja prve kroglice vzpostavi v tekočini? S kolikšno hitrostjo se kot posledica gibanja prve kroglice giblje druga kroglica? Predpostavite, da je tekočina zelo viskozna in da se hitrost le počasi spreminja s časom. (Oseenov problem)



Slika 2.3: Medsebojen vpliv gibajočih se kroglic v viskozni tekočini.

Pri reševanju bomo v Navier-Stokesovi enačbi (2.1) zopet zanemarili člene $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ in $(\vec{v}.\nabla)\vec{v}$, predpostavili bomo torej, da sta hitrost in s tem Reynoldsovo število majhna. Podobno kot pri prejšnji nalogi se da pokazati, da je takšen približek konsistenten, če je le $\frac{a}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \ll 1$. Osnovni enačbi toka tekočine lahko torej zapišemo kot

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}(\vec{r}), \\ &\nabla \cdot \vec{v} = 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

kjer je $\mu = \frac{\eta}{\rho}$, $\vec{f}(\vec{r})$ pa je gostota zunanjih sil, ki delujejo na tekočino, deljena z ρ. Prvi enačbi pravimo tudi Stokesova enačba. Če prvo kroglico potiskamo s hitrostjo $\vec{v}_0$, le-ta deluje po Stokesu na tekočino s silo $6\pi a \eta \vec{v}_0$ oziroma z gostoto sile

$$\vec{f}(\vec{r}) = 6\pi a \mu \vec{v}_0 \, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{F}_0 \, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

kjer je $\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)$ običajna Diracova funkcija. Ker imamo problem definiran v neskončnem prostoru, ga rešimo s Fourierovim integralom. Zapišimo v ta namen vse relevantne funkcije s pomočjo Fourierovih integralov:

$$
\begin{aligned}
p(\vec{r}) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, p(\vec{k})\, e^{i\vec{k}r}, \\
\vec{v}(\vec{r}) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \vec{v}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}r}, \\
\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_0)}.
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

Če te nastavke vstavimo v Stokesovo enačbo (2.14), dobimo za Fourierovi komponenti $p(\vec{k})$ in $\vec{v}(\vec{k})$ naslednji enačbi

$$
\begin{aligned}
-i\vec{k}p(\vec{k}) - \mu k^2 \vec{v}(\vec{k}) + \vec{F}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}_0} &= 0, \\
\vec{k}\cdot\vec{v}(\vec{k}) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

Pomnožimo prvo enačbo z $i\vec{k}$ in upoštevajmo drugo, pa dobimo

$$
p(\vec{k}) = -\frac{i\vec{k}\cdot\vec{F}_0}{k^2}\, e^{-i\vec{k}\vec{r}_0}.
$$

Da bi določili $\vec{k}$, vstavimo rešitev za tlak nazaj v prvo enačbo (2.16),

$$
\vec{v}(\vec{k}) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\vec{F}_0}{k^2} - \frac{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{F}_0)}{k^4}\right) e^{-i\vec{k}\vec{r}_0}.
$$

Vse, kar nam preostane, je, da rešitev iz prostora $\vec{k}$ pretransformiramo nazaj v realni prostor. Pomnožimo zgornjo enačbo z $e^{i\vec{k}\vec{r}}$, integrirajmo po $\vec{k}$ in upoštevajmo definicije (2.15), pa dobimo

$$
\vec{v}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu}\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, k^2}\left(\vec{F}_0 - \frac{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{F}_0)}{k^2}\right) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_0)} \tag{2.17}
$$

oziroma po komponentah

$$
\vec{v}_i(\vec{r}) = \frac{1}{\mu}\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, k^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) F_{0j}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_0)}.
$$

Izračunajmo zgornji integral. Začnimo takole:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, k^2}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_0)} &= \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{2\pi k^2\, dk\, \sin\theta\, d\theta}{(2\pi)^3 k^2}\, e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|\cos\theta} = \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk \frac{\sin k|\vec{r}-\vec{r}_0|}{k|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\, |\vec{r}-\vec{r}_0|}.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Podobno naredimo tudi z drugim členom v enačbi (2.17). Najprej ugotovimo, da je

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, k^4}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_0)} = \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{8\pi} + Const.,$$

kjer konstanta $Const.$ ni več funkcija $|\vec{r}-\vec{r}_0|$. Od tega rezultata je samo še kratek korak, pa ugotovimo, da je

$$\nabla_i \nabla_j \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, k^4}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_0)} = -\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, k^4}\, k_i k_j\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_0)} = \nabla_i \nabla_j \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{8\pi}.$$

Končen izraz za hitrost potemtakem dobimo kot

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu\, |\vec{r}-\vec{r}_0|} \left(\vec{F}_0 + \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)\, ((\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot \vec{F}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \right),$$

kar je tudi končni Oseenov izraz (C. W. Oseen 1927). Posplošiti se da tako, da imamo lahko več kroglic, od katerih nekatere pomikamo z različnimi hitrostmi ter opazujemo, kako se na to gibanje odzivajo druge kroglice. Bralec naj to precej nazorno posplošitev razišče sam.

Če se zdaj povrnemo na naš osnovni problem, to je gibanje druge kroglice, ugotovimo, da se druga kroglica pri $\vec{r}_1$ giblje s hitrostjo

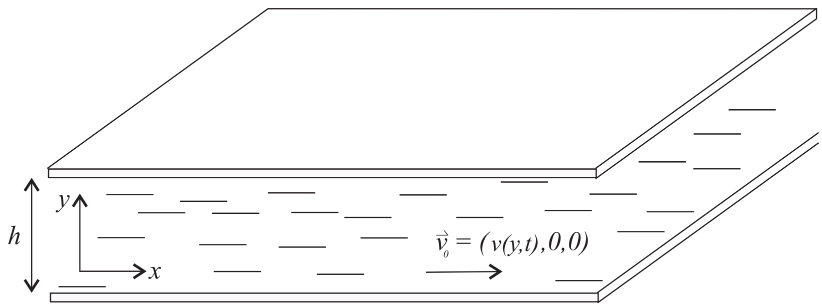
$$\vec{v}(\vec{r}_1) = \frac{3a}{2\, |\vec{r}_1-\vec{r}_0|} \left(\vec{v}_0 + \frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_0)\, ((\vec{r}_1-\vec{r}_0).\vec{v}_0)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_0|^2} \right).$$

Upoštevali smo, da je $\vec{F}_0 = 6\pi a\mu\vec{v}_0$. Premik ene same kroglice v viskozni tekočini ustvari hitrostno polje, ki pada približno inverzno z razdaljo od kroglice. Po drugi strani pa to pomeni, da na drugo kroglico deluje sila z velikostjo $6\pi a\eta\vec{v}(\vec{r}_1)$. Viskozna tekočina torej posreduje interakcije med potopljenimi kroglicami, ki so dolgega dosega in padajo približno inverzno z razdaljo med njimi. Takšnim interakcijam pravimo tudi **hidrodinamske interakcije**.

Hidrodinamske interakcije lahko opazujemo v medu. Vanj vržemo nekaj kroglic in počakamo toliko časa, da se porazdelijo po medu kar se da enakomerno. Nato vržemo v med še nekoliko večjo in težjo testno kroglico, ki počasi pada proti dnu posode z medom, in opazujemo, kako se gibljejo manjše kroglice okrog nje. Hitro uvidimo, da se vpliv gibanja večje kroglice na manjše zmanjšuje z razdaljo med njimi. Če bi takšne meritve opravili kvantitativno, bi potrdili Oseenov rezultat.

Naloga

Tekočina z viskoznostjo η teče v smeri osi x skozi režo, ki ima v smeri y debelino h. Gradient tlaka naj ima komponento le v smeri x, zapisali ga bomo takole: $-\nabla p = (a\, e^{-i\omega t}, 0, 0)$, kjer je seveda mišljena realna vrednost tega izraza. Izračunajte odvisnost x komponente hitrosti od koordinate y in njeno povprečje po reži!



Slika 2.4: V viskozni tekočini se gradient tlaka sinusno spreminja s časom.

Začnemo z Navier-Stokesovo enačbo v obliki

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}.\nabla)\vec{v}\right)=-\nabla p+\eta\nabla^2\vec{v}$$

in robnim pogojem, da je hitrost na obeh površinah $y=\pm h/2$ enaka nič. Hkrati mora biti rešitev tudi simetrična glede na točko $y=0$, ki jo postavimo na sredino reže.

Glede na obliko gradienta tlaka je smiselno predpostaviti, da ima tudi hitrost obliko $(v(y,t),0,0)$. S tem nastavkom dobimo Navier-Stokesovo enačbo v obliki

$$\rho\frac{\partial v(y,t)}{\partial t}=a\,e^{-i\omega t}+\eta\frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2}.$$

Rešitev te enačbe je

$$v(y,t)=f(y)e^{-i\omega t}+i\frac{a}{\omega\rho}e^{-i\omega t},$$

kjer je funkcija $f(y)$ rešitev enačbe

$$\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2}=-i\frac{\omega\rho}{\eta}f(y).$$

Rešitve te enačbe so kotne funkcije. Upoštevali bomo le funkcijo $\cos$, ker je simetrična glede na izhodišče na sredini reže. Takšne morajo biti namreč tudi rešitve Navier - Stokesove enačbe. Celotna rešitev se torej glasi

$$v(y,t)=\left(A\cos ky+i\frac{a}{\omega\rho}e^{-i\omega t}\right),$$

kjer je

$$k=\sqrt{\frac{\omega\rho}{\eta}}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\quad\text{oziroma}\quad k^2=i\frac{\omega\rho}{\eta}.$$

Če sedaj upoštevamo še robno pogoje pri $y=\pm h/2$, lahko izračuname tudi konstanto A in končno dobimo enakost

$$v(y,t)=i\frac{a}{\omega\rho}\left(1-\frac{\cos ky}{\cos kh/2}\right)e^{-i\omega t}.$$

Od tod lahko takoj dobimo tudi povprečno vrednost hitrosti v reži

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{+h/2} v(y,t)dy = i\frac{a}{\omega\rho}\left(1 - \frac{2}{kh}\tan kh/2\right)e^{-i\omega t}.$$

Pri vsem tem ne smemo pozabiti, da je v zgornjih izrazih vedno mišljen le realni del! Poglejmo si še različne limite teh izrazov.

- V primeru velike viskoznosti ali pa majhne debeline reže imamo $kh \longrightarrow 0$. Takrat lahko razvijemo $\tan x \simeq x + x^3/3 + 2x^5/15\ldots$, upoštevamo le realni del rešitve in dobimo do najnižjega reda po h približek
$$\bar{v}(t) \simeq \Re e\left(a\frac{h^2}{12\eta}e^{-i\omega t}\right) = a\frac{h^2}{12\eta}\cos\omega t.$$
- V nasprotnem primeru pa imamo $kh \longrightarrow \infty$, kar ustreza majhnim viskoznostim oziroma velikim debelinam reže. Takrat velja $\tan kh/2 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ in dobimo do najnižjega reda po h približek
$$\bar{v}(t) \simeq \Re e\left(i\frac{a}{\omega\rho}e^{-i\omega t}\right) = -\frac{a}{\omega\rho}\sin\omega t.$$

V obeh limitah sta torej fazi hitrosti premaknjeni za $-\pi/2$. Časovno spreminjanje hitrosti v obeh primerih sledi gradientu zunanjega tlaka.

Naloga

Drsni ležaj sestavimo iz dveh velikih plošč, od katerih leži spodnja vodoravno, zgornja pa je za majhen kot zasukana iz vodoravne lege. Spodnja plošča se giblje s hitrostjo v_0, zgornja pa miruje. Prostor med ploščama zapolnjuje viskozna tekočina, ki ima ob ploščah enako hitrost kot plošče. S kakšno silo deluje tekočina na zgornjo ploščo? S kolikšno silo moramo vleči spodnjo ploskev, da se bo gibala s hitrostjo v_o?

Navier-Stokesova enačba ima za nestisljive viskozne tekočine naslednjo obliko:

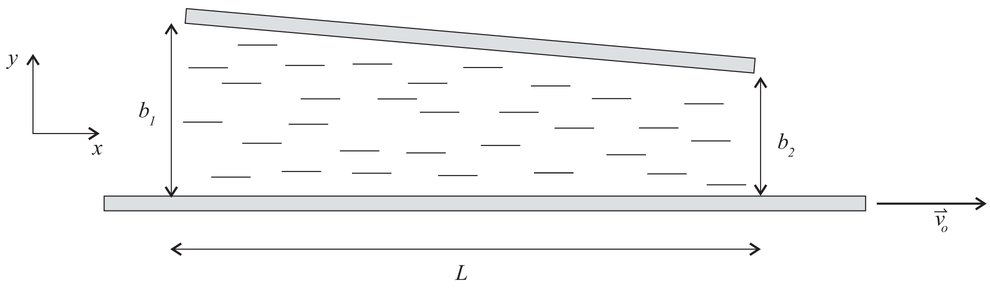
$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\triangle\vec{v}. \tag{2.19}$$

Izberimo tak koordinatni sistem, da bo os x vzporedna spodnji plošči. V tem primeru lahko oddaljenost zgornje plošče od spodnje zapišemo kot

$$y(x) = \frac{b_2 - b_1}{L}x + b_1.$$

b_1 je razdalja med ploščama pri $x = 0$, b_2 pa pri $x = L$. Ker je naklon zgornje plošče majhen, bomo uporabili približek, da se hitrost tekočine vzdolž osi x ne spreminja ter da je od nič različna le komponenta hitrosti v smeri x,

$$\vec{v} = (v_x(y), 0, 0).$$



Slika 2.5: Drsni ležaj je sestavljen iz dveh velikih plošč, ki oklepata majhen kot ($\alpha \ll 1$). Med njima je viskozna tekočina. Zgornja plošča miruje, spodnja pa se giblje s hitrostjo v_o.

S tem približkom se enačba (2.19) poenostavi, saj je

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = v_x(y)\frac{\partial v_x(y)}{\partial x} = 0.$$

Če upoštevamo še to, da hitrost ni neposredno odvisna od časa, dobimo

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2}, \ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{2.20}$$

Druga in tretja enačba v (2.20) nam povesta, da se p ne spreminja z y ali z. Ker nas zanima, kako se tlak spreminja v smeri x, bomo prvo enačbo v (2.20) dvakrat integrirali po y. Dobimo

$$v_x(y) = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{y^2}{2} + Cy + D. \tag{2.21}$$

Konstanti C in D bomo določili iz robnih pogojev. Pri tem bomo upoštevali, da ima tekočina ob ploščah enako hitrost kot plošči. Ob spodnji plošči tako velja $v_x(0) = v_0$, od koder sledi, da je $D = v_0$. Ob zgornji plošči pa lahko zapišemo $v_x\left(\frac{b_2-b_1}{L}x + b_1\right) = 0$. Iz izraza (2.21) tako sledi

$$C = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{b_2 - b_1}{L}x + b_1\right) - \frac{v_0}{\frac{b_2-b_1}{L}x + b_1}.$$

Da bi poenostavili zapis, bomo namesto izraza $\frac{b_2-b_1}{L}x + b_1$ pisali b. Tako dobimo naslednjo obliko hitrostnega profila:

$$v_x(y) = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{y^2}{2} - \left(\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}b + \frac{v_0}{b}\right)y + v_0. \tag{2.22}$$

V naslednjem koraku moramo poiskati tlak kot funkcijo x. Pri tem bomo upoštevali, da mora biti prostorninski pretok na prečno dimenzijo, Q, neodvisen od x, kar pomeni enak za vse b:

$$\begin{aligned} Q = \int_0^b v_x(y)dy &= \int_0^b \left[\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{y^2}{2} - \left(\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}b + \frac{v_0}{b}\right)y + v_0\right]dy = \\ &= \frac{1}{6\eta}\frac{\partial p}{\partial x}b^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}b + \frac{v_0}{b}\right)b^2 + v_0 b. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Iz te zveze lahko izrazimo, kako se spreminja tlak vzdolž osi x:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{b^3}{6\eta}-\frac{b^3}{4\eta}\right) &= Q+\frac{v_0 b}{2}-v_0 b, \qquad (2.24)\\
&\text{ali}\\
\frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{12\eta Q}{b^3}+\frac{6\eta v_0}{b^2}. \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Zgornjo enačbo bomo integrirali po x in pri tem upoštevali, da je b odvisen od x,

$$
p(x)-p_0=-12\eta Q\int_0^x \frac{dx}{\left(\frac{b_2-b_1}{L}x+b_1\right)^3}+6\eta v_0\int_0^x \frac{dx}{\left(\frac{b_2-b_1}{L}x+b_1\right)^2}
$$

ali

$$
\begin{aligned}
p(x)-p_0 &= \frac{6\eta L}{b_2-b_1}\left[Q\left(\frac{1}{(\frac{b_2-b_1}{L}x+b_1)^2}-\frac{1}{b_1^2}\right)-\right.\\
&\left. - v_0\left(\frac{1}{\frac{b_2-b_1}{L}x+b_1}-\frac{1}{b_1}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Da bi $p(x)$ natančno poznali, moramo določiti še konstanto Q. Določimo jo iz zahteve, da je tlak pri $x=L$ enak p_0, saj je ležaj pri $x=0$ in $x=L$ odprt. Zato mora biti

$$
Q=v_0\frac{b_1 b_2}{b_1+b_2}.
$$

Od izraza za silo, ki deluje na zgornjo ploskev, nas loči le še integral tlaka po zgornji ploskvi, to pomeni po x:

$$
\frac{F}{a}=\int_0^L (p(x)-p_o)\,dx=\frac{6L^2\eta v_o}{(b_2-b_1)^2}\left(2\frac{b_2-b_1}{b_1+b_2}-\ln\frac{b_2}{b_1}\right).
$$

V zgornjem izrazu smo upoštevali, da zunanji zračni tlak p_o ne prispeva k sili na zgornjo ploskev. Parameter a označuje dolžino ležaja v smeri osi z.

Izračunajmo še silo, s katero moramo vleči spodnjo ploskev, da se bo ta gibala s hitrostjo v_o. Silo bomo določili s pomočjo napetostnega tenzorja

$$
\mathsf{p}_{ik}=p\delta_{ik}+\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right).
$$

Ker nas zanima sila, ki deluje v smeri osi x na ploskev z normalo v smeri osi y, moramo izračunati p_{xy}. Pri tem bomo upoštevali izraz za hitrost (2.22);

$$
\mathsf{p}_{xy}=\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}=\eta\left[\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y-\left(\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}b+\frac{v_o}{b}\right)\right]=\frac{\partial p}{\partial x}\left(y-\frac{b}{2}\right)-\frac{\eta v_o}{b}.
$$

Izračunajmo p_{xy} pri $y = 0$. Pri tem bomo upoštevali izraz (2.25),

$$\mathsf{p}_{xy} = 12\eta v_o \frac{b_1 b_2 b}{(b_1 + b_2) b^3 2} - \frac{6\eta v_o b}{b^2 2} - \frac{\eta v_o}{b} = 3\eta v_o \left(2\frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} \frac{1}{b^2} - \frac{4}{3b} \right).$$

Vlečna sila na prečno dolžino $D_x = \frac{D}{a}$ je torej enaka

$$D_x = \int_0^L dx \mathsf{p}_{xy} = \frac{3\eta v_o L}{b_2 - b_1} \left(2\frac{b_2 - b_1}{b_1 + b_2} + \frac{4}{3} \ln \frac{b_1}{b_2} \right).$$

Izbrati bi želeli toliko vrednost razmerja parametrov b_1 in b_2, da bo dvižna sila zgornje ploskve čim večja. To se zgodi pri $\frac{b_1}{b_2} = 2,2$, ko ima funkcija (2.26) ekstrem.

Zapišimo sedaj še razmerje F/D_x. Ležaj bo tem boljši, čim večje bo to razmerje. Zapis bomo poenostavili z uvedbo funkcij $\mu(x)$ in $\xi(x)$, kjer je $\mu(x) = \frac{1}{1-x}\left(2\frac{1-x}{1+x} + \frac{4}{3}\ln x\right)$ in $\xi(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\left(2\frac{1-x}{1+x} + \ln x\right)$. Tako lahko zapišemo

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{3\eta v_o L}{b_2} \mu \left(\frac{b_1}{b_2} \right), \\ \frac{F}{a} &= \frac{6\eta L^2 v_o}{b_2^2} \xi \left(\frac{b_1}{b_2} \right). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Razmerje $\frac{F/a}{D}$ je torej enako

$$\frac{F}{D} = \frac{6\eta L^2 v_o b_2}{b_2^2 3\eta v_o L} \frac{\xi(\frac{b_1}{b_2})}{\mu(\frac{b_1}{b_2})} = \frac{2L}{b_2^2} \frac{\xi(\frac{b_1}{b_2})}{\mu(\frac{b_1}{b_2})}.$$

Z zahtevo, da je nosilna sila čim večja, je razmerje $\frac{b_1}{b_2}$ določeno. Da bi dobili čim večje razmerje $\frac{F/a}{D}$, lahko potem bodisi povečamo L bodisi zmanjšamo b_2.