

Pisni izpit iz Matematike 2
27. junij 2012

Priimek in ime: Vpisna št.:

--	--	--	--	--	--	--	--

1. Na prostoru \mathcal{M} kvadratnih realnih matrik velikosti 3×3 je dan predpis

$$\langle A, B \rangle = \text{sled}(AB^\top).$$

- (a) Pokaži, da je ta predpis skalarni produkt.
- (b) Naj bo \mathcal{D} vektorski podprostor diagonalnih matrik. Poišči kakšno bazo in razsežnost ortogonalnega komplementa \mathcal{D}^\perp .
- (c) Naj bo f linearni funkcional, ki vsaki matriki priredi njen element, ki leži v prvi vrstici in v prvem stolpcu. Poišči takšno matriko B , da bo za vse matrike $X \in \mathcal{M}$ veljalo

$$f(X) = \langle X, B \rangle.$$

2. Linearni preslikavi $A, B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sta podani s praviloma

$$A(x, y, z) = (y - x, z - y, x - z), \quad B(x, y, z) = (z + 2x, x + 2y, y + 2z).$$

- (a) Pokaži, da je preslikava B obrnljiva.
- (b) Preslikava C je definirana kot $C = AB^{-1}$. Poišči matriko, ki pripada preslikavi C v bazi $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.
- (c) Določi kakšni bazi jedra in slike preslikave C .

3. Za katere vrednosti parametra $t \in \mathbb{R}$ se da diagonalizirati matriko

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 25 \\ 0 & t & t+1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ?$$

V primerih, ko se matrika da diagonalizirati, poišči tudi njene lastne vrednosti in lastne vektorje.
Svoje sklepe dobro utemelji.

4. Dokaži ali ovrzi: za poljubno točko (x, y, z) na elipsoidu

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$$

velja

$$x + y + z \leq \frac{8}{5}.$$