A: Matematika 2: 1.Kolokvij, 26. 4. 2013

Možno je doseči 100 točk. Veliko sreče!

1	2	3	4	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Izračunaj

$$(6A^{-1} + A^2)^{2013}.$$

Naloga 2 [25 točk]

Za linearno preslikavo $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ velja

$$A\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2+x\\2x\\2x\\2x\end{bmatrix}, \quad A\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3+3x\\2+3x\\4x\\4x\end{bmatrix}, \quad A\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-2\\-x\\-x\\2-2x\end{bmatrix}, \quad A\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\3\\3\\5-x\end{bmatrix}$$

Zapiši matriko, ki glede na standardno bazo pripada preslikavi A ter izračunaj dimenzijo jedra preslikave A v odvisnosti od parametra $x \in \mathbb{R}$.

Naloga 3 [25 točk]

Naj bo $\mathbb{R}_2[x]$ prostor vseh polinomov stopnje največ 2 opremljen s skalarnim produktom $< -, - >$, v katerem je $\{1, x, x^2\}$ ortonormirana baza. Dokaži, da je za poljubne $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ preslikava $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ podana s predpisom

$$A(p(x)) = (ax^2 + bx + c)p''(x) + (dx + e)p'(x) + fp(x),$$

linearna preslikava. Poišči vse tiste linearne preslikave, ki imajo zgornjo obliko in kjer je $d > 0$, za katere bo $\{A(1), A(x), A(x^2)\}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}_2[x]$ glede na $< -, - >$.

Naloga 4 [25 točk]

Definirajmo prostora

$$U = Lin\left\{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\} \qquad V = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | sled X = sled(XA)\},$$

kjer je $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$. Izračunaj dimenzije prostorov U, V, $Lin\{U \cup V\}$ in $U \cap V$.