

Četrty kolokvij iz Matematike 2
15. junij 2012

1. Pokaži, da je naslednja determinanta velikosti $n \times n$

$$\begin{vmatrix} & & & & & & -3 & -1 \\ & & & & & & -3 & -1 & 2 \\ & & & & & & -3 & -1 & 2 \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & -3 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

enaka

$$(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{2^{n+1} - (-3)^{n+1}}{5}.$$

Pri tem $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pomeni celi del števila $\frac{n}{2}$, zaokrožen navzdol. Na neoznačenih mestih so ničle.

2. Dana je preslikava $A: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$,

$$A(x, y, z) = (0, x, -2x - y - z).$$

- (a) Pokaži, da se A ne da diagonalizirati.
(b) Za katere kompleksne parametre a in b obstaja baza \mathbb{C}^3 , v kateri preslikavi A pripada matrika

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ?$$

3. Katero ploskev predstavlja enačba

$$-\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + 4z^2 + 7xy - 2xz - 2yz = 1 ?$$

Čim bolj natančno nariši njen presek z ravnino $x + y + z = 0$.

4. Največ kolikšna je lahko razlika $|x - y|$ koordinat točke, ki leži na krivulji

$$x^2 + xy + y^2 = 1 ?$$