4. kolokvij, 2002

1. Izračunaj A^{100} za matriko
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. V prostoru realnih polinomov stopnje največ dva je podan skalarni produkt
$$(p,q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
V podprostoru
$$U := \{p \in P_2(\mathbb{R});\ p'(0) = p'(1) = 0\}$$
poišči polinom, ki je, glede na dani skalarni produkt, najbližje polinomu $t^2 + t$.

3. Preslikava $R\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je vrtež okrog premice
$$\frac{x}{2} = -y = \frac{z}{2}.$$
Napiši matriko adjungirane preslikave R^* glede na običajni skalarni produkt in opiši njeno geometrijsko delovanje.

4. Sebi adjungirana linearna preslikava $S\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ima dvojno lastno vrednost 0, pripadajoči lastni podprostor je ravnina $x + y - z = 0$; in še eno lastno vrednost 1. Poišči matriko, ki pripada preslikavi S v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

4. kolokvij, 2004

1. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje $(2n+1) \times (2n+1)$ matrike:
$$\begin{bmatrix} & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \end{bmatrix}$$
Na neoznačenih mestih so ničle. Če naloge ne znaš rešiti v splošnem, jo reši vsaj v primeru, ko je $n = 2$ ([15%]).

2. V prostoru realnih linearnih polinomov $P_1(\mathbb{R})$ je dan skalarni produkt
$$(p,q) := p(0)q(0) + p(1)q(1).$$
Kateri linearni polinom je glede na ta skalarni produkt najbližje funkciji $f(x) = e^x$?

3. Izračunaj peti koren matrike
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. V prostoru $P_2(\mathbb{R})$ polinomov stopnje največ dva je dan skalarni produkt

$$(p,q) := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$$

in podprostor

$$\mathcal{U} := \{p \in P_2(\mathbb{R});\ p'(0) = 0\}.$$

Kateri polinom v prostoru $\mathcal{U}$ je najbližje polinomu $r(t) = t + 1$? Kolikšna je oddaljenost polinoma r od prostora $\mathcal{U}$?

4. Koliko je ortogonalnih preslikav $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki preslikajo
premico $x = \frac{y}{2} = z$ v premico $-\frac{x}{2} = y = z$
in premico $x = -y = z$ v premico $x = y = z$?
Poišči matriko katere od njih v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

4. kolokvij, 2001

1. Linearni preslikavi $\mathcal{P}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v standardnih bazah ustreza matrika

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -6 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike P.

(b) S pomočjo točke (a) opiši, zakaj je preslikava $\mathcal{P}$ geometrijsko projekcija. Kam in vzdolž česa projicira?

2. V prostoru $P_2(\mathbb{R})$ je dan skalarni produkt

$$(p,q) := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

in podprostor

$$\mathcal{U} := \{p \in P_2(\mathbb{R});\ p'(1) = 0\}.$$

Kateri polinom v prostoru $\mathcal{U}$ je najbližje polinomu $t^2 + t + 1$?

3. Linearna preslikava $A\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$(Ap)(t) := tp'(t) + \int_0^t xp''(x)\,dx.$$

Prostor $P_2(\mathbb{R})$ je opremljen z enakim skalarnim produktom kot v drugi nalogi. Katera matrika pripada preslikavi A^* v standardni bazi $\{1, t, t^2\}$ prostora $P_2(\mathbb{R})$?

4. Poišči funkcije $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, ki rešijo sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} x' &= -x + y \\ y' &= 4y - 2z \\ z' &= 6y - 3z \end{aligned}$$

4. kolokvij, 1999

1. Dana je matrika
$$A := \begin{bmatrix} -6 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ -14 & 12 & 15 \end{bmatrix}.$$
Poišči kakšno matriko $B \in M_3(\mathbb{R})$, za katero velja $B^3 = A$. Koliko je takšnih matrik?

2. Za katere vrednosti parametra $t \in \mathbb{R}$ se da diagonalizirati matrika
$$\begin{bmatrix} 1 & t & 25 \\ 0 & t & t+1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Na vektorskem prostoru $P_3(\mathbb{R})$ realnih polinomov stopnje manjše ali enake tri je dana preslikava
$$\langle p,q\rangle := \int_0^1 p'(t)q'(t)\,dt + p(0)q(0)\,.$$
Pokaži, da je to skalarni produkt.

   Poišči (glede na zgornji skalarni produkt) adjungirano preslikavo A^* k preslikavi A, ki je podana s pravilom
$$(Ap)(t) = t^3 p(1/t)\,.$$

4. Pri istem skalarnem produktu kot pri tretji nalogi poišči pravokotno projekcijo polinoma $1 + t - t^3$ na podprostor $U = \ker D^3$, kjer je $Dp := p'$. Kolikšna je razdalja tega vektorja do podprostora U?

4. kolokvij, 2000

1. Na prostoru $P_2(\mathbb{R})$ realnih polinomov stopnje največ dva so dani funkcionali
$$f_i(p) := 6\int_0^i p(t)\,dt\,; \quad i = 1,2,3\,.$$
   (a) Pokaži, da funkcionali $\{f_1, f_2, f_3\}$ tvorijo bazo prostora $P_2(\mathbb{R})^*$.

   (b) Kateri polinom po Rieszovem izreku ustreza funkcionalu f_2 glede na skalarni produkt
$$(p,q) := \int_{-1}^1 p(t)q(t)\,dt\,?$$

2. Dana je matrika
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Utemelji, zakaj se da matrika A diagonalizirati.

   (b) Za $n \in \mathbb{N}$ poišči matriko A^n.

4. V prostoru $P_1(\mathbb{R})$ polinomov stopnje največ ena je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1)\,.$$

Naj bo $A\colon\ P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ linearna preslikava, dana s predpisom

$$(Ap)(t) := (tp(t))'\,.$$

Določi $A^*(t+1)$.

4. kolokvij, 1998

1. [25 %] Linearna preslikava $\mathcal{A}$, ki slika iz prostora realnih polinomov stopnje največ dva vase, je podana s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(t) := (tp(t))' + 6t\int_0^1 p(x)dx\,.$$

   (a) [10 %] Določi matriko A, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih bazah $\{1, t, t^2\}$.

   (b) [15 %] Določi podobno diagonalno matriko in ustrezno prehodno matriko.

2. Naj bo V n-razsežen realni vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$, a in b pa dana linearno neodvisna vektorja iz prostora V. Preslikava $\mathcal{A}\colon\ V \to V$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}x := \langle x, a\rangle b\,.$$

   (a) [10 %] Pokaži, da je preslikava $\mathcal{A}$ linearna. Določi predpis za adjungirano preslikavo $\mathcal{A}^*$.

   (b) [10 %] Določi lastne vrednosti in ustrezne lastne podprostore preslikave $\mathcal{A}$. Ali se da preslikava $\mathcal{A}$ diagonalizirati? Odgovor utemelji.

   (c) [10 %] Kakšna morata biti vektorja a in b, da bo preslikava $\mathcal{A}$ normalna?

3. [25 %] V prostoru realnih polinom stopnje največ tri je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx\,.$$

   Poišči kakšno pravokotno bazo množice $\{1+t, t^2-1\}^\perp$.

4. [20 %] Čim bolj natančno nariši krivuljo v $\mathbb{R}^2$, določeno z enačbo

$$-3x^2 - 8xy + 3y^2 = 1\,.$$

   Določi osi dane krivulje.

4. kolokvij, 1996

1. Dana je kvadratna forma

$$Q(x,y,z) = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + 4z^2 + 7xy - 2xz - 2yz\,.$$

Katero ploskev predstavlja enačba $Q(x,y,z) = 0$? Poišči njene osi, jo skiciraj in nariši njen presek z ravnino $x + y + z = 0$.

2. Sebi adjungirana linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima lastne vrednosti 1, -1 in 0. Njeno jedro je premica $x = -y$, $z = 0$ in velja

$$\mathcal{A}(1,1,-1) = (-1,-1,1)\,.$$

Poišči matriko za $\mathcal{A}^n$ v standardni bazi. V $\mathbb{R}^3$ imamo standardni skalarni produkt.

3. Naj bo $\mathcal{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projektor na ravnino $x + y - z = 0$ vzdolž premice $x = y = z$. Poišči matriko za $\mathcal{P}$ v standardni bazi. Pokaži, da je tudi $\mathcal{P}^*$ projektor. Kam projecira in vzdolž česa? V $\mathbb{R}^3$ imamo standardni skalarni produkt.

4. V prostoru $P_2(\mathbb{R})$ polinomov stopnje kvečjemu dva je dan predpis

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt + p(0)q(0)\,.$$

Pokaži, da je to skalarni produkt in poišči kakšno pravokotno bazo ortogonalnega komplementa prostora

$$V = \mathcal{L}\{t^2 - t\}\,.$$

4. kolokvij, 1997

1. Katero ploskev v prostoru predstavlja enačba

$$y^2 - 3z^2 + 4xz = 4\,?$$

Poišči njene osi. Čim bolj natančno nariši njen presek z ravnino $y = 0$.

2. (a) Naj bo V realen vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in normo $\|\cdot\|$, porojeno iz tega produkta. Pokaži, da za poljubna vektorja $x, y \in V$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja:
   (i) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x,y\rangle$
   (ii) Če je $\|x\| = \|y\|$, potem je $\|\alpha x + \beta y\| = \|\alpha y + \beta x\|$.

   (b) V $\mathbb{R}^2$ je dana norma $\|(a,b)\| := |a| + |b|$. Pokaži, da obstajata taka vektorja $x, y \in \mathbb{R}^2$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, da je $\|x\| = \|y\|$, vendar $\|\alpha x + \beta y\| \neq \|\alpha y + \beta x\|$. (To pomeni, da tako definirana norma ni porojena iz skalarnega produkta.)

3. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in $A, B\colon V \to V$ sebi adjungirani linearni preslikavi. Pokaži: če je za vsak vektor $x \in V$ velja enakost

$$\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle\,,$$

potem je $A = B$.

4. kolokvij, 1994

1. Naj bo U vektorski prostor s skalarnim produktom, $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ pa linearni preslikavi $U \to U$. Dokaži:
$$\mathcal{B}^*\mathcal{A} = 0 \iff \operatorname{im}\mathcal{B} \subset (\operatorname{im}\mathcal{A})^\perp .$$

2. Katero ploskev predstavlja enačba
$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 14xy + 8xz - 8yz = 24\,?$$
Poišči njene osi. Čim bolj natančno nariši krivuljo, ki je presek te ploskve z ravnino $z = 0$.

3. Poišči matriko zrcaljenja čez podprostor
$$V = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ 4a - b - c = 0,\ b - c + 4d = 0\}$$
v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^4$.

4. V $\mathbb{R}^3$ uvedi skalarni produkt tako, da bodo vektorji
$$(1,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$$
ortonormirani. Glede na tak skalarni produkt izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $(1,0,0)$ na vektor $(0,1,0)$.

4. kolokvij, 1995

1. Dana sta podprostora v $\mathbb{R}^4$
$$U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ a + b + c + d = 0\},$$
$$V = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ a = 2b = -c = 2d\}.$$
P naj bo projektor na V vzdolž U. Poišči matriki za P in P^* v standardnih bazah prostora $\mathbb{R}^4$. Ali je P^* projektor? Če je, kam in vzdolž česa projicira?

2. Poišči matriko kakšne ortogonalne transformacije $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki preslika ravnino $x+y+z = 0$ na ravnino $x - y - 2z = 0$ in vektor $(1,-1,0)$ v vektor $(1,1,0)$. Koliko je takšnih matrik?

3. Kaj predstavlja ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo
$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz + 4yz = 1\,?$$
Čim bolj natančno nariši presek te ploskve z ravnino $x = 0$.

4. Na bo V realen vektorski prostor in K linearna preslikava $V \to V$. Pokaži, da velja $K^* = -K$ natanko takrat, kadar za vsak vektor $x \in V$ velja $\langle Kx, x\rangle = 0$.

(b) Poišči matriko, ki preslikavi A ustreza v bazi $\{1+t, 1-t, t^2+t\}$.

4. Na prostoru polinomov stopnje največ dva so dani funkcionali:

$$\begin{aligned} f_1(p) &= p(0) + p''(0), \\ f_2(p) &= p'(1), \\ f_3(p) &= p''(2) + p'(-1). \end{aligned}$$

Poišči matrike, ki jim ustrezajo v standardnih bazah in pokaži, da funkcionali tvorijo bazo prostora $P_2(\mathbb{R})^*$.

3. kolokvij, 2003

1. Naj bodo vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ paroma pravokotni in $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$. Izračunaj prostornino tetraedra, napetega na vektorjih

$$\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b},\ \vec{q} = \vec{c} - 2\vec{a},\ \vec{r} = 2\vec{b} - \vec{c}.$$

2. Naj bo A preslikava iz prostora realnih polinomov stopnje največ dva $P_2(\mathbb{R})$ vase. Podana je s pravilom

$$(Ap)(t) := tp'(t) - p(t).$$

(a) Pokaži, da je preslikava A linearna.

(b) Določi matriko, ki ji pripada v standardni bazi $\{1, t, t^2\}$.

(c) Poišči kakšni bazi jedra in slike preslikave A.

3. (a) Preslikava $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zrcaljenje čez premico

$$x = \frac{y}{2} = -\frac{z}{2}.$$

Določi matriko, ki pripada preslikavi A v standardnih bazah.

(b) Preslikavi $B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa iz baze $\{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ v standardno bazo ustreza matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Katera matrika ustreza preslikavi $A \circ B$ v standardnih bazah?

4. Naj bo S sfera določena z enačbo $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$ in p premica, ki je presek ravnin $x + z = 2$ in $5x - 2z = 3$.

(a) Pokaži, da imata S in p natanko eno skupno točko.

(b) Poišči enačbe vseh ravnin skozi izhodišče koordinatnega sistema, ki se dotikajo S, so vzporedne p in ne vsebujejo p.

3. kolokvij, 2001

1. Napiši enačbo premice p, ki je zrcalna slika premice

$$q\colon\ 1-x=\frac{y-3}{2}=z$$

glede na ravnino

$$\Sigma\colon\ x-3y+2z=3\,.$$

2. Premica p je presek ravnin

$$\Sigma\colon\ x-y+z=1 \quad \text{in} \quad \Pi\colon\ 3x+2y-z=4\,.$$

Napiši enačbo ravnine Ω, ki vsebuje premico p in oklepa z ravnino Σ kot 60°. Kakšen kot oklepa ravnina Ω z ravnino Π? Koliko je rešitev?

3. Preslikava $A\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$(Ap)(t) := \frac{4}{t}\int_0^t p(s)\,ds - (p(t)t)'\,.$$

   (a) Pokaži, da je preslikava A linearna.

   (b) Napiši matriko, ki preslikavi A ustreza v standardnih bazah $\{1, t, t^2\}$ prostorov $P_2(\mathbb{R})$.

   (c) Poišči kakšni bazi jedra in slike preslikave A.

4. Napiši matriko, ki v standardni bazi prostorov $\mathbb{R}^3$ ustreza linearni preslikavi $A\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki preslika

$$\begin{aligned}(1,-1,-1) &\mapsto (3,1,1)\,,\\ (1,1,-1) &\mapsto (2,0,1)\,,\\ (1,0,2) &\mapsto (-1,2,1)\,.\end{aligned}$$

3. kolokvij, 2002

1. Dan je trikotnik z oglišči $A(1,-1,2)$, $B(2,1,2)$ in $C(3,-2,2)$. Poišči središče trikotniku ABC včrtanega kroga.

2. Dani sta premici

$$p\colon\ x=y=z \ \text{ in } \ q\colon\ \frac{x}{2}=-y=\frac{z}{3}\,.$$

   (a) Poišči enačbo ravnine Σ, ki vsebuje obe premici.

   (b) Poišči matriko, ki ustreza pravokotni projekciji na ravnino Σ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$. Kakšne so njene lastne vrednosti in lastni vektorji?

3. Dana je preslikava $A\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$,

$$(Ap)(t) = (t^2+2t)p''(t) - 2(p(t)+p'(t))\,.$$

   (a) Pokaži, da je preslikava A linearna.

3. Naj bo $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki za vsak $i \in \{1,2,3\}$ vektor $\vec{a}_i$ preslika v vektor $\vec{b}_i$, kjer so

$$\vec{a}_1 = (1,1,0),\ \vec{a}_2 = (0,1,-1),\ \vec{a}_3 = (1,2,0),$$
$$\vec{b}_1 = (1,0,0),\ \vec{b}_2 = (2,2,-2),\ \vec{b}_3 = (0,3,0).$$

Poišči matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi.

4. Funkcionali f_1, f_2 in f_3 na prostoru $P_2(\mathbb{R})$ polinomov stopnje največ dva so podani s formulami

$$f_1(p) := \int_0^1 p(t)\,dt\,, \quad f_2(p) := p'(1)\,, \quad f_3(p) := \int_0^1 tp'(t)\,dt\,.$$

Dokaži, da tvorijo bazo prostora funkcionalov $P_2(\mathbb{R})^*$.

3. kolokvij, 2000

1. Naj bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enotska vektorja, ki oklepata kot 120^o. Reši vektorsko enačbo

$$(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = \vec{a} + (\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}\,.$$

2. Ravnina Σ vsebuje premico

$$p\colon\ x - 1 = 2y - 2 = z + 1$$

in se dotika nekega valja $\mathcal{V}$ z osjo $x = y = z$. Določi enačbo ravnine Σ in polmer valja $\mathcal{V}$.

3. Dano je realno število a in matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Preslikava $\mathcal{T}\colon\ M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s pravilom

$$\mathcal{T}(X) := AX - XA\,.$$

(a) Pokaži, da je preslikava $\mathcal{T}$ linearna.

(b) Določi matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{T}$ v standardni bazi matrik

$$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}\,.$$

Pri tem E_{ij} pomeni matriko, ki ima na križišču i-te vrstice in j-tega stolpca enko, drugod pa ničle.

(c) Poišči bazo jedra in zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{T}$ v odvisnosti od parametra a. Ali je v kakšnem primeru preslikava $\mathcal{T}$ obrnljiva?

4. Določi matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ ustreza zrcaljenju čez premico

$$x = \frac{y}{2} = z.$$

2. Naj bo a dano realno število. Preslikava A, ki slika iz prostora polinomov stopnje največ dva v prostor $\mathbb{R}^3$, je podana s predpisom

$$A\colon\ p \mapsto \left(p'(0) + a, 2p(0) + p(1), 3\int_0^1 p(t)dt\right).$$

Najprej določi parameter a tako, da bo preslikava A linearna. Nato zapiši matriko, ki preslikavi A ustreza v standardnih bazah obeh prostorov in določi bazo jedra preslikave A.

3. Poišči matriko v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$, ki ustreza pravokotni projekciji na premico

$$x = \frac{y}{2} = z\,.$$

Kaj je jedro in kaj je slika te preslikave?

4. Preslikavi $\mathcal{C}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ustreza iz standardne baze prostora $\mathbb{R}^3$ v bazo

$$\{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$$

matrika

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

preslikavi $\mathcal{D}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa iz standardne baze prostora $\mathbb{R}^3$ v bazo

$$\{(1,2,0),(2,5,1),(1,3,0)\}$$

ustreza matrika

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Katera matrika ustreza kompozitumu preslikav $\mathcal{C} \circ \mathcal{D}$ v standardnih bazah prostora $\mathbb{R}^3$?

3. kolokvij, 1999

1. Naj bosta premici p in q podani z enačbama

$$p\colon\ x = 2y = z\,, \quad q\colon\ \frac{3x-6}{4} = 3y - 3 = \frac{3z-6}{8}\,.$$

Pokaži, da se premici p in q sekata ter poišči vse ravnine, glede na katere sta si zrcalni.

2. Dana je ravnina

$$\Pi\colon\ x + 2y - z = 0$$

in točki $P(2,-1,2)$, $Q(0,3,0)$. Poišči množico točk v ravnini Π, ki so od točk P in Q enako oddaljene.

3. kolokvij, 1997

1. Za dano realno število λ tvorimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Preslikava $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je dana s predpisom

$$T(X) := AX - XA\,.$$

Pokaži, da je preslikava T linearna. Poišči matriko, ki preslikavi T pripada v standardni bazi prostora matrik $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, kjer ima matrika E_{ij} na i,j-tem mestu enko, drugod pa ničle. Določi tudi razsežnost jedra preslikave T v odvisnosti od parametra λ.

2. Naj bo $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija na premico $x = 2y = z$, $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa pravokotna projekcija na abcisno os. Preslikava R naj bo definirana kot vsota $P+Q$. Katera matrika ustreza preslikavi R v standardni bazi? Poišči bazo jedra in slike preslikave R.

3. Naj bosta A in B linearni preslikavi iz prostora realnih polinomov stopnje največ dva vase. Preslikava A je podana s pravilom

$$(Ap)(t) := p'(t) + tp(0)\,,$$

preslikavi B pa v bazi $\{1+t, 2t-t^2, 1+t^2\}$ ustreza matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kolikšna je razsežnost slike produkta AB. Določi $AB(2-t^2)$.

4. Določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. kolokvij, 1998

1. Poišči premico, ki je vzporedna ravninama

$$x - y + 2z = 2 \quad \text{in} \quad x + 3z = 6$$

in seka premici

$$x = 2, \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} \quad \text{in} \quad 1 - x = \frac{y+2}{2} = z\,.$$

Poišči njene lastne vrednosti in lastne vektorje, podobno diagonalno matriko in ustrezno prehodno matriko.

Če ne znaš rešiti naloge v splošnem, jo reši vsaj za $n = 4$. ([15 %])

4. Poišči matriko linearne preslikave $\mathcal{A}: P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ v standardnih bazah, če veš:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(3x^2 + 2x + 1) &= 2x^2 - 3 \\ \mathcal{A}(x^3 + 4x^2 + 3x + 2) &= x^2 + x + 2 \\ \mathcal{A}(x^3 + 6x^2 + 4x + 3) &= x^2 - x \\ \mathcal{A}(x^3 + x^2 + x) &= x + 1 \end{aligned}$$

Poišči tudi jedro preslikave $\mathcal{A}$.

3. kolokvij, 1996

1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ leži valj z osjo

$$x = 0,\ y = z$$

in polmerom 2. Poišči premici skozi točko $A(2,2,0)$, ki sta vzporedni ravnini $x + y + z = 2$ in se dotikata valja.

2. Preslikava $D\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ je odvajanje na prostoru polinomov stopnje največ dva, $D(p) = p'$; preslikavi $A\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ pa v bazi $\{1, x + x^2, x - x^2\}$ ustreza matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kateri polinomi ležijo v jedru preslikave DA, kateri polinomi ležijo v sliki preslikave DA?

3. V prostoru $\mathbb{R}^3$ sta dani bazi

$$\mathcal{A} = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{C} = \{(1,1,1),(0,1,0),(0,1,1)\},$$

v prostoru $\mathbb{R}^2$ pa bazi

$$\mathcal{B} = \{(1,1),(0,1)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{S} = \{(1,0),(0,1)\}.$$

Linearni preslikavi $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ pripada iz baze $\mathcal{A}$ v bazo $\mathcal{B}$ matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kakšna matrika ji pripada iz baze $\mathcal{C}$ v bazo $\mathcal{S}$?

4. Diagonaliziraj matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. kolokvij, 1994

1. Dana je preslikava $A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,
$$A\colon\ (a,b,c,d) \mapsto (c,c,a+b,d)\,.$$
Pokaži, da je linearna, zapiši njeno matriko v standardni bazi in poišči njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

2. Naj bo A preslikava, ki vsako točko $T \in \mathbb{R}^3$ prezrcali čez premico $2x = y = 4z$. Zapiši matriko za A v standardni bazi in poišči njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

3. (a) Naj bo x lastni vektor linearne preslikave A pri lastni vrednosti λ. Pokaži, da je za vsako število $k \in \mathbb{N}$ vektor x tudi lastni vektor preslikave A^k. Katera lastna vrednost mu pripada?
   (b) Pokaži, da nilpotenten operator nima lastnih vrednosti različnih od 0. (Operator N je *nilpotenten*, če obstaja tako naravno število r, da je $N^r = 0$.)

4. Za linearni funkcional $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ velja:
$$\begin{aligned} f(1,1,-1) &= 2\,,\\ f(3,-1,-1) &= 4\,,\\ f(-5,1,3) &= 6\,. \end{aligned}$$
Koliko je $f(x,y,z)$, kjer je (x,y,z) poljuben vektor v $\mathbb{R}^3$?

3. kolokvij, 1995

1. Skozi točko $T(1,2,-1)$ položi premico p, ki seka premici q in r, podani z enačbama
$$q\colon\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{3}\,, \qquad r\colon\ \frac{x-2}{3} = y = -z-3\,.$$

2. Naj bo $A \in M_3(\mathbb{R})$ dana matrika in $\mathcal{T}\colon M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ preslikava, podana takole:
$$\mathcal{T}(X) := AX\,.$$
Pokaži, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava. Poišči njeno matriko v bazi
$$\{E_{11}, E_{21}, E_{31}, E_{12}, E_{22}, E_{32}, E_{13}, E_{23}, E_{33}\}\,,$$
kjer je E_{ij} matrika, ki ima na i,j-tem mestu enko, drugje pa ničle. Kdaj je preslikava $\mathcal{T}$ bijektivna? V tem primeru poišči njen inverz.

3. Dana je matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$
$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. kolokvij, 2001

1. V $\mathbb{R}^4$ je dan podprostor

$$U := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ a+b+c=0,\ 2c+d=0\}\,.$$

Za vsako od naslednjih množic utemelji ali je ogrodje in ali je baza prostora U:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= \{(1,1,-2,4),\ (0,-2,2,-4)\}\,,\\
\mathcal{B} &:= \{(3,-1,-2,4),\ (0,0,2,-1)\}\,,\\
\mathcal{C} &:= \{(1,0,-1,2),\ (0,1,-1,2),\ (1,1,-2,4)\}\,,\\
\mathcal{D} &:= \{(-3,1,2,-1),\ (2,-1,-1,2),\ (3,-1,-2,4)\,,\\
\mathcal{E} &:= \{(-3,1,2,-1),\ (2,-1,-1,2)\}\,.
\end{aligned}$$

2. V prostoru $P_3(\mathbb{R})$ realnih polinomov stopnje največ tri sta dana podprostora

$$\begin{aligned}
U &:= \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(0)=0,\ p'(2)=p(2)\} \quad \text{in}\\
V &:= \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p''(1)=p'(1)\}.
\end{aligned}$$

Poišči baze prostorov U, V, $U \cap V$ in $U+V$.

3. Naj bo n naravno, a pa realno število. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$:

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\
1 & 0 & a & a & \dots & a\\
1 & a & 0 & a & \dots & a\\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \vdots & & & \ddots & a\\
1 & a & a & \dots & a & 0
\end{vmatrix}.$$

4. Dana je matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in množica

$$\mathcal{M} := \{X \in M_3(\mathbb{R});\ XA = AX^{\mathsf{T}}\}\,.$$

Pokaži, da je množica $\mathcal{M}$ vektorski podprostor v prostoru $M_3(\mathbb{R})$, poišči njegovo razsežnost in kakšno bazo.

4. Naj bo n naravno število večje od 2, x in y pa poljubni realni števili. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ y & x & & & & \\ y & & x & & & y \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ y & & & & \ddots & y \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix}.$$

Na neoznačenih mestih determinante so ničle.

1. kolokvij, 2000

1. Dana je matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo

$$\mathcal{A} := \{X \in M_3(\mathbb{R});\ (A+X)^2 = A^2 + 2AX + X^2\}.$$

Pokaži, da je $\mathcal{A}$ vektorski podprostor v prostoru matrik $M_3(\mathbb{R})$, določi njegovo razsežnost in kakšno bazo.

2. V prostoru realnih polinomov stopnje največ tri sta dana podprostora

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p'(0) = p(1) = 0\}, \\ \mathcal{V} &:= \mathcal{L}\{2t^3 - t^2 - 1, t^2 + t - 1\}. \end{aligned}$$

Poišči baze prostorov $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

3. Naj bosta x in y realni števili. Izračunaj naslednjo tridiagonalno determinanto velikosti $n \times n$ (na neoznačenih mestih so ničle):

$$\begin{vmatrix} 2xy & x^2 & & & & \\ y^2 & 2xy & x^2 & & & \\ & y^2 & 2xy & x^2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & y^2 & 2xy & x^2 \\ & & & & y^2 & 2xy \end{vmatrix}.$$

4. Naj bo

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za naravno število n ugani koliko je A^n, nato pa svojo ugotovitev dokaži z indukcijo. Izračunaj še A^{-n}. (*Nasvet:* Najtežje je ugotoviti vrednost v zgornjem desnem kotu. Ko računaš zaporedne potence, poglej, katera števila se seštevajo med sabo.)

2. Naj bo a dano realno število. V prostoru $\mathbb{R}^4$ je dan podprostor

$$V := \mathcal{L}\{(-2-a, 4, 5+a, 4+a), (1, -2, -2, -1), (-a, 3, 1+a, 4+a)\}.$$

V odvisnosti od parametra a določi razsežnost in kakšno bazo prostora V.

3. Za dano naravno število n izračunaj naslednjo determinanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \ldots & n-4 & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-3 & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

4. V prostoru $M_2(\mathbb{R})$ realnih matrik velikosti 2×2 je dana matrika

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

in množici

$$\mathcal{A} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ AX = XA\}, \quad \mathcal{T} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ AX = X^{\mathsf{T}}\}.$$

Pokaži, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{T}$ vektorska podprostora v prostoru $M_2(\mathbb{R})$ in poišči baze prostorov $\mathcal{A}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{A}+\mathcal{T}$ in $\mathcal{A}\cap\mathcal{T}$.

1. kolokvij, 1999

1. Ali sta naslednji podmnožici vektorska podprostora prostora $\mathbb{R}^4$?

$$\mathcal{A} := \left\{(a,b,c,d);\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & b+1 \\ c+1 & d-1 \end{vmatrix}\right\},$$

$$\mathcal{B} := \left\{(a,b,c,d);\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & -d \end{vmatrix}\right\}.$$

2. V množici realnih polinomov stopnje največ pet je dan vektorski podprostor

$$\mathcal{S} := \{p \in P_5(\mathbb{R});\ \int_{-1}^{1} tp(t)\,dt = 0,\ \int_{-1}^{1} t^2p(t)\,dt = 0\}.$$

(a) Določi njegovo razsežnost in kakšno bazo.

(b) Dopolni zgornjo bazo do baze celotnega prostora $P_5(\mathbb{R})$.

3. V prostoru $\mathbb{R}^4$ sta dana podprostora

$$\mathcal{U} := \mathcal{L}\{(1,2,2,1), (2,1,4,-1)\},$$

$$\mathcal{V} := \{(a,b,c,d);\ a+b+c+d = 0,\ a+b = c+d\}.$$

Poišči baze prostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ in $\mathcal{U}+\mathcal{V}$.

1. kolokvij, 1997

1. Dana je matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in množica

$$\mathcal{M} := \{X \in M_3(\mathbb{R});\ XA + AX^{\mathsf{T}} = 0\}\,.$$

Pokaži, da je množica $\mathcal{M}$ podprostor v prostoru matrik $M_3(\mathbb{R})$. Določi njegovo bazo in razsežnost.

2. V prostoru realnih polinomov stopnje največ tri ležita podprostora

$$\mathcal{U} := \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(1) = p'(1)\}\,, \mathcal{V} := \{p \in P_3(\mathbb{R});\ p(1) = \int_0^1 p(t)dt\}\,.$$

Poišči baze prostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

3. Izračunaj naslednjo determinanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n-1 & n & n-1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n & n-1 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-1 & n & n-1 & \dots & 5 & 4 & 3 \\ n-1 & n & n-1 & n-2 & \dots & 4 & 3 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Poišči rang naslednje matrike v odvisnosti od realnega parametra a:

$$\begin{bmatrix} a+1 & -1 & 1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 & a-1 \\ a+1 & a-1 & a+1 & 3a+1 \\ a & 2a & a & 2a \end{bmatrix}.$$

1. kolokvij, 1998

1. V prostoru $P_4(\mathbb{R})$ realnih polinomov stopnje največ štiri je dan podprostor

$$U := \{p \in P_4(\mathbb{R});\ p(1) = p'(0) = 0\}$$

in množice

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{x^4 + x^3 - 2, x^4 + x^2 - 2, x^3 - x^2\} \\ \mathcal{B} &:= \{x^4 + x^3, x^4 + x^2 - 2, x^2 - 1\} \\ \mathcal{C} &:= \{x^4 + x^3 - 2, x^4 + x^2 - 2, x^2 - 1\} \\ \mathcal{D} &:= \{x^3 + x^2 - 2, 2x^4 + x^3 - 3, x^2 - 1, x^4 + x^3 + x^2 - 3\}\,. \end{aligned}$$

Za vsako od množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ ugotovi ali je ogrodje in ali je baza prostora U.

4. Dano je naravno število $n \geq 3$. Glede na parnost števila n poišči bazo in razsežnost prostora
$$\mathcal{Z} := \{p \in P_n(\mathbb{R});\ p(0) = p''(0) = 0,\ p'(1) = p'(-1)\}.$$

1. kolokvij, 1996

1. Naj bo n naravno število, ki je večje od 2. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $n \times n$, ki ima na neoznačenih mestih ničle:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ -2 & 1 & 1 & & & \\ & -2 & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -2 & 1 & 1 \\ 1 & & & & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Naj bosta A in B realni kvadratni matriki
$$A := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$
$\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ pa naslednji podmnožici v prostoru matrik $M_2(\mathbb{R})$:
$$\mathcal{U} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ AXA^{\mathsf{T}} = X\}, \quad \mathcal{V} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ BXB^{\mathsf{T}} = X\}.$$
Pokaži, da sta množici $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ vektorska podprostora v prostoru matrik $M_2(\mathbb{R})$ in poišči baze prostorov $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

3. Določi rang naslednje matrike v odvisnosti od realnega parametra a:
$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-a^2 & 1 & 2a^2-1 & 2a-1 \\ 1 & 1 & 2a-1 & 2-a^2 & 2-a \\ 1 & 1 & 1 & a^2 & a \end{bmatrix}.$$

4. Naj bo $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}[x,y]$ podmnožica polinomov dveh spremenljivk x in y oblike
$$\mathcal{M} := \{a + by + cy^2 + x(d + ey + fy^2);\ a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}\},$$
podprostor $\mathcal{N}$ v prostoru $\mathcal{M}$ pa sestavljajo tisti polinomi $p \in \mathcal{M}$, za katere velja
$$\frac{\partial p}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial p}{\partial y}(1,1) = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x}\partial y(1,0) = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(1,0).$$
Določi bazo in razsežnost prostora $\mathcal{N}$.

4. V prostoru realnih polinomov stopnje največ dva $P_2(\mathbb{R})$ je podano pravilo

$$(p, q) := p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0).$$

(a) Pokaži, da je $(\cdot, \cdot)$ skalarni produkt na $P_2(\mathbb{R})$.

(b) Določi bazo prostora $\mathcal{L}\{t + 1, t^2 - 1\}^{\perp}$.

(b) [5] Določi še $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$.

2. Za matriko $A \in M_3(\mathbb{R})$ naj ${}^{\mathsf{T}}A$ pomeni matriko A, prezrcaljena čez stransko diagonalo. $\mathcal{S}$ in $\mathcal{T}$ naj bosta podmnožici $M_3(\mathbb{R})$ oblike
$$\mathcal{S} := \{A \in M_3(\mathbb{R});\ A = A^{\mathsf{T}}\}, \quad \mathcal{T} := \{B \in M_3(\mathbb{R});\ B^{\mathsf{T}} = {}^{\mathsf{T}}B\}.$$
Pokaži, da sta $\mathcal{S}$ in $\mathcal{T}$ podprostora, določi baze prostorov $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ in $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ in izračunaj razsežnost vsote $\mathcal{S} + \mathcal{T}$.

3. Naj bo $J \in M_n(\mathbb{R})$ matrika, ki jo sestavljajo same enke. Reši enačbo
$$J - X = XJ.$$
Če enačbe ne znaš rešiti v splošnem, jo reši vsaj za primer $n = 4$. ([15])

4. Določi rang matrike A v odvisnosti od realnega parametra t:
$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2t & 3 \\ 2 & 2-t & 1 & -t \\ 3 & 0 & 2+t & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. kolokvij, 1995

1. Izračunaj naslednjo determinanto velikosti $2n \times 2n$, ki ima na neoznačenih mestih ničle:
$$\begin{vmatrix} 1 & & & & 1 & & & & \\ & 2 & & & 2 & & & & \\ & & \ddots & & \vdots & & & & \\ & & & n-1 & n-1 & & & & \\ 1 & 2 & \ldots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ & & & & n+1 & n+1 & & & \\ & & & & n+2 & & n+2 & & \\ & & & & \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 2n & & & & 2n \end{vmatrix}.$$

2. Dani sta matriki
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Naj bo
$$\mathcal{U} := \{X \in M_3(\mathbb{R}); AX = XA\}, \quad \mathcal{V} := \{X \in M_3(\mathbb{R}); BX = XB\}.$$
Pokaži, da sta množici $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ vektorska podprostora v prostoru $M_3(\mathbb{R})$ in poišči baze prostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ in $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

3. Določi razsežnost prostora
$$\mathcal{W} := \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 3+2a & 3a \\ 3a & 3a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1+3a & 3+2a \\ 3a & 3a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & a \\ 3 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a-1 & a-1 \\ a-1 & a-1 \end{bmatrix}\right\}$$
v odvisnosti od realnega parametra a.

1. kolokvij, 1993

1. Naj bosta A in B kvadratni realni matriki

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

z $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ pa označimo množici

$$\mathcal{A} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ AX = XA\}, \quad \mathcal{B} := \{X \in M_2(\mathbb{R});\ BX = XB\}.$$

Pokaži, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ vektorska podprostora v $M_2(\mathbb{R})$ in določi baze prostorov $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

2. Naj bo $\mathcal{S}$ množica vseh takih matrik $A \in M_n(\mathbb{R})$, da je matrika $A + A^{\mathsf{T}}$ diagonalna. Pokaži, da je $\mathcal{S}$ vektorski podprostor prostora matrik $M_n(\mathbb{R})$, določi kakšno njegovo bazo in razsežnost.

3. Določi determinanto matrike $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, kjer je

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= (-1)^{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \le i \le n, \\ a_{i,i-1} &= (-1)^{i} \quad \text{za} \quad 2 \le i < n, \\ a_{1,i} &= (-1)^{i+1} \quad \text{za} \quad 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Ostale komponente matrike A so enake 0.

4. Za dana števila $s, t, u \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, definiramo matrike

$$M(s) := \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}, \quad N(t) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \quad P(u) := \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dokaži, da se da matrika $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ zapisati kot produkt

$$X = M(s)N(t)P(u)$$

natanko tedaj, ko je $a \neq 0$ in je $\det(X) = 1$.

1. kolokvij, 1994

1. Dan je sistem n enačb z n neznankami:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) [20] S pomočjo Cramerjevega pravila izračunaj x_1 in x_n.