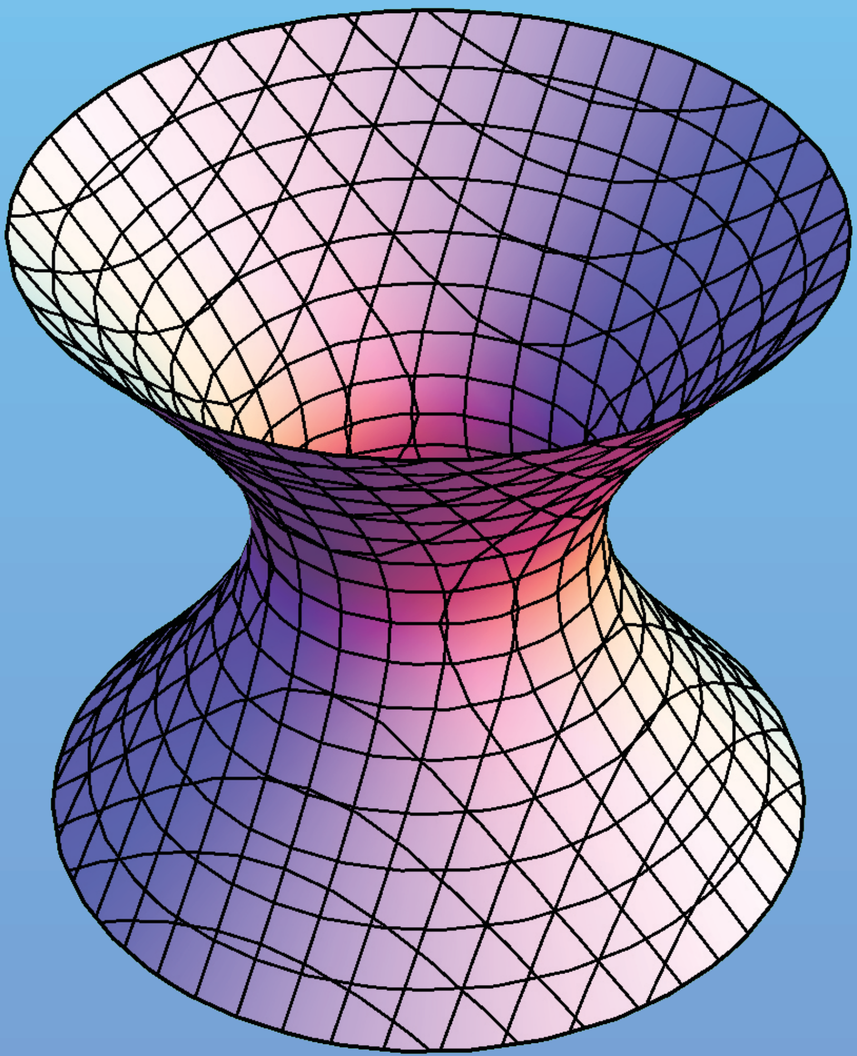
Bojan Magajna

Linearna algebra, metrični prostor in funkcije več spremenljivk



DMFA – založništvo

Bojan Magajna

LINEARNA ALGEBRA, METRIČNI PROSTOR IN FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

DMFA – založništvo

Ljubljana 2011

LINEARNA ALGEBRA, METRIČNI PROSTOR IN FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

Povzetek

Ta knjiga je namenjena študentom kot drugi tečaj iz matematike, potem ko so že spoznali trirazsežne vektorje in osnove diferencialnega računa v eni realni spremenljivki. Obravnava linearno algebro (do Jordanove kanonične forme, kvadratnih form in končno razsežnih algeber z deljenjem), osnove metričnih prostorov in diferencialni račun za vektorske funkcije več spremenljivk.

Ključne besede: vektorski prostor, linearen operator, matrika, determinanta, lastna vrednost, lastni vektor, invarianten podprostor, kvadratna forma, kvaternion, algebra z deljenjem, metrični prostor, polnost, kompaktnost, povezanost, negibna točka, odvod kot linearna preslikava, implicitna funkcija, mnogoterost, vezani ekstrem.

LINEAR ALGEBRA, METRIC SPACE AND FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Summary.

This is a second course of mathematics, intended primarily for students of physics. It covers classical linear algebra (up to the Jordan canonical form, quadratic forms and finite dimensional division algebras), basics of metric spaces and differential calculus in several variables.

Key words: vector space, inner product, linear operator, matrix, determinant, eigenvalue, eigenvector, invariant subspace, quadratic form, quaternion, division algebra, metric space, completeness, compactness, connectedness, fixed point, the derivative as a linear map, implicit function, manifold, constrained extrema.

Mathematics Subject Classification (2010): 15-01, 54-01, 26-01.

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

512.64
515.124
517.983.6

MAGAJNA, Bojan

Linearna algebra, metrični prostor in funkcije več spremenljivk / Bojan Magajna. – 1. natis. – Ljubljana: DMFA–založništvo, 2011. – (Matematika – fizika: zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij, ISSN 1408-1571; 50)

ISBN 978-961-212-244-7

256718336

Kazalo

Predgovor

Študentje naravoslovnih in tehničnih usmeritev spoznajo osnove diferencialnega in integralskega računa za funkcije ene realne spremenljivke že v prvem semestru prvega letnika. Funkcije več spremenljivk pa pridejo na vrsto kasneje. Možni so različni pristopi k diferencialnemu računu v več spremenljivkah, za temeljit pristop pa je nujno dobro poznavanje linearne algebre.

Večino vsebine te knjige zaseda linearna algebra. Poudarek je na linearnih operatorjih, matrike pa obravnavamo le kot orodje za predstavitev linearnih operatorjev. Linearni operatorji so sicer abstraktnejši od matrik, vendar pa neizbežni za študente fizike, ki jim je ta knjiga v prvi vrsti namenjena, saj se pojavljajo vsepovsod v kvantni mehaniki pa tudi drugod. Operatorji, ki nastopajo v kvantni fiziki, delujejo običajno na neskončnorazsežnih prostorih. Take operatorje obravnava funkcionalna analiza. Toda za razumevanje le-teh je zelo koristno najprej spoznati operatorje na končnorazsežnih prostorih. Tako je lažje razumeti algebro operatorjev, saj ni obremenjena z analitičnimi dodatki, ki so neizbežni v neskončnorazsežnih prostorih.

V zelo omejenem številu ur predavanj, ki so namenjene matematiki v novih univerzitetnih programih naravoslovnih in tehničnih smeri, seveda še zdaleč ni mogoče predelati vse za naravoslovca uporabne snovi; treba se je omejiti le na najnujnejše. V knjigi lahko nekoliko omilimo to omejitev in predstavimo logično zaokroženo celoto nekaterih tem. Osnova za pisanje te knjige je bil program pri predmetu Matematika 2 za študente fizike. Vključil pa sem še nekaj tem, ki jih fiziki (in drugi) gotovo potrebujejo, a jih zaradi časovne omejitve ni bilo mogoče obdelati pri predavanjih.

Prva štiri poglavja tako predstavijo dokaj celovit pregled osnov linearne algebre. Čeprav ni absolutno nujno, bo poznavanje elementarne vektorske algebre, ki jo študentje spoznajo že v prvem semestru, olajšalo razumevanje gradiva. Obravnavo začnemo z definicijo vektorskega prostora. Nato predelamo klasične teme do Jordanove kanonične forme, kvadratnih form in funkcij operatorjev. To snov obdelamo v približno takem obsegu, kot jo spoznajo tudi študentje matematike v prvem letniku. Poleg tega pa smo dodali razdelka o kvaternionih (ker so uporabni tudi v fiziki) in končnorazsežnih asociativnih algebrah z deljenjem. S tem pa seveda ni zajeta vsa linearna algebra, ki je uporabna v fiziki: da knjiga ne bi postala preveč obsežna in da ne bi prekoračila ravni abstrakcije, ki je še primerna v prvem letniku, smo morali izpustiti na primer tenzorske in zunanje produkte. Količino snovi smo želeli obdržati v obsegu, kakršnega lahko obvlada zelo priden študent v enem semestru.

Peto poglavje obravnava osnove topologije v metričnem prostoru. Pri tem smo se omejili na osnovne pojme, kot so: odprte in zaprte množice, kompaktnost, polnost, povezanost. To so seveda splošni topološki pojmi, toda zdi se nam, da jih je v prvem poskusu dosti lažje razumeti v metričnem prostoru. Po drugi strani pa prehod iz evklidskega v metrični prostor v tej zvezi ne prinaša dodatnega napora, zato bi bila omejitev na evklidske prostore nepotrebna. Snov, ki jo tukaj obdelamo, zadošča kot podlaga za klasično analizo v drugem letniku, nikakor pa ne vključuje vseh temeljev teorije metričnih prostorov. Kot zgled za uporabo lastnosti zveznih funkcij predstavimo enega od dokazov osnovnega izreka algebre.

Šesto, zadnje poglavje se ukvarja z diferencialnim računom v več spremenljivkah. Parcialne odvode in elementarne pojme v zvezi s tem spoznajo študentje fizike že v prvem semestru, zato začnemo obravnavo kar z definicijo odvoda kot linearnega operatorja. Snov smo poskusili podati na način, ki sicer, strogo vzeto, ne zahteva nobenega poprejšnjega znanja o parcialnih odvodih, vendar pa tako predznanje najbrž olajša razumevanje. V zvezi z uporabo izrekov o inverzni in implicitni funkciji se nismo mogli izogniti pojmu podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$. Ta pojem je pomemben tudi v moderni teoretični fiziki. Definicija podmnogoterosti, ki smo jo vključili, je prilagojena uporabi v zadnjem razdelku, pri obravnavi vezanih ekstremov. (Bolj standardno definicijo vpeljemo v nalogah.)

Na koncu vseh razdelkov so naloge. Mnogokrat so te naloge problemi, ki zahtevajo od reševalca, da dokaže kako trditev. Njihov namen je (poleg urjenja v matematičnem premišljevanju) dopolnitev snovi, obdelane v glavnem tekstu. Težje naloge so opremljene z izčrpnimi navodili, ki so včasih skoraj že popolne rešitve, zato upam, da bo marsikateri bralec zmogel velik del nalog, ki se jih bo lotil. Zahtevnejše naloge so označene z *, nekaj zelo zahtevnih pa z **.

Kolegoma Ediju Kramarju in Marku Petkovšku se zahvaljujem za njune nasvete pri risanju slik z računalnikom, Vladimirju Batagelju in Matjažu Zaveršniku pa za pomoč pri uporabi LaTeXa. Matjažu Zaveršniku in Tadeji Šekoranja gre zahvala za trud in potrpežljivost pri vnašanju popravkov. Zahvaljujem se tudi asistentu Klemnu Šivicu ter študentom Boru Kavčiču, Andreju Dvorniku, Matiji Čufarju, Janu Fišerju, Juretu Staretu in Filipu Kozarskemu, ki so me opozorili na nekaj napak. Ogromno truda pa je vložil v pregled prve verzije tega dela recenzent Peter Legiša. Zelo sem mu hvaležen za številne popravke in tehtne predloge. Njemu in Borisu Lavriču gre zahvala tudi za to, da sta priporočila izid knjige. Gospodu Janezu Juvanu gre zahvala za mnoge pravopisne in stilistične popravke. Samoumevno je, da so vse napake, ki so morda še ostale, moja odgovornost.

Ljubljana, avgust 2011
Bojan Magajna

POGLAVJE 1

Vektorski prostori

1.1. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

Trirazsežni vektor je določen s trojko svojih komponent, to je trojko koordinat svoje končne točke. (Za začetno točko vektorja bomo vedno vzeli koordinatno izhodišče. Vektorji tukaj so torej to, kar fiziki imenujejo 'krajevni vektorji'.) Množica vseh takih vektorjev je torej kar množica

$$\mathbb{R}^3 := \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

vseh trojk realnih števil. V $\mathbb{R}^3$ seštevamo vektorje kot

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

Vsak vektor lahko pomnožimo s številom $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3).$$

Podobno računamo z vektorji v ravnini, le da imamo tedaj opravka s pari realnih števil (namesto trojk). Očitno pa lahko na enak način računamo tudi s četverkami ali peterkami realnih števil.

Splošneje za vsako naravno število n označimo z $\mathbb{R}^n$ množico vseh n-terk $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kjer so *koordinate* $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ realna števila. Pri tem s pojmom n-terka mislimo urejeno n-terko: dve n-terki $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sta enaki natanko tedaj, ko se ujemata v vseh koordinatah, torej ko je $x_j = y_j$ za vse $j = 1, 2, \ldots n$. Elemente množice $\mathbb{R}^n$ (torej urejene n-terke) bomo imenovali kar *vektorji.* Za dva vektorja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ lahko definiramo njuno *vsoto* kot

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Prav tako lahko definiramo *produkt skalarja z vektorjem* kot

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Pogosto imenujemo vektorje iz $\mathbb{R}^n$ kar *točke prostora* $\mathbb{R}^n$. Pri tem si zamišljamo, da koordinate x_j pomenijo koordinate točke $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Čeprav si prostora $\mathbb{R}^n$ za $n > 3$ ne moremo predstavljati, se ta pojem izkaže za koristen računski pripomoček. Še več, pokaže se, da lahko geometrijske pojme iz $\mathbb{R}^3$ posplošimo na $\mathbb{R}^n$, zato ima ta pojem tudi geometrijsko vsebino. Kot vemo iz fizike, tudi opis realnega sveta zahteva več kot tri razsežnosti. Ker si prostora $\mathbb{R}^n$ za $n > 3$ ne moremo predstavljati, je toliko pomembneje, da navedemo ključne lastnosti računanja z vektorji v $\mathbb{R}^n$. Te lastnosti nam bodo omogočile, da bomo lahko prepoznali $\mathbb{R}^n$ tudi, ko se bo pojavil v morda zakriti obliki.

Enako kot v $\mathbb{R}^n$ lahko računamo tudi v prostoru $\mathbb{C}^n$ vseh n-terk kompleksnih števil. Pravzaprav lahko namesto $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ vzamemo katerikoli obseg. Preden navedemo formalno definicijo obsega, povejmo, da je to neprazna množica $\mathbb{F}$, opremljena z dvema operacijama $+$ in $\cdot$, ki imata podobne lastnosti kot seštevanje in množenje realnih (ali pa kompleksnih) števil, razen morda, da množenje ni komutativno (torej $a \cdot b$ ni nujno enako $b \cdot a$). Zaradi enostavnosti bomo obravnavo omejili na *komutativne obsege* ali *polja.*

Oznaka $\mathbb{F}$ bo v vsej knjigi pomenila polje. Bralec lahko vzame, če tako želi, da je kar $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ali pa $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Navedimo sedaj definicijo obsega.

DEFINICIJA 1.1.1. *Obseg* je neprazna množica K, opremljena z dvema operacijama, imenovanima seštevanje in množenje, ki vsakemu urejenemu paru (a, b) elementov $a, b \in K$ priredita natanko določena elementa $a + b$ in ab v K. Pri tem morajo biti izpolnjeni naslednji pogoji:

(G1) *Asociativnost seštevanja*: $(a + b) + c = a + (b + c)$ za vse $a, b, c \in K$.

(G2) *Obstoj nevtralnega elementa za seštevanje*: obstaja tak element $0 \in K$, da je $a + 0 = a = 0 + a$ za vsak $a \in K$.

(G3) *Obstoj inverznega elementa za seštevanje*: za vsak $a \in K$ obstaja tak element $-a \in K$, da je $a + (-a) = 0 = (-a) + a$.

(G4) *Komutativnost seštevanja*: $b + a = a + b$ za vsaka $a, b \in K$.

(K1) *Asociativnost množenja*: $(ab)c = a(bc)$ za vse $a, b, c \in K$.

(K2) *Distributivnost*: $(a + b)c = ac + bc$ in $c(a + b) = ca + cb$ za vse $a, b, c \in K$.

(K3) *Obstoj nevtralnega elementa za množenje*: obstaja tak element $1 \in K$, da je $1a = a = a1$ za vsak $a \in K$ in $1 \neq 0$.

Množico K, opremljeno z operacijama, ki imata doslej naštete lastnosti, imenujemo *kolobar z enoto.*

(O1) *Obstoj inverza za množenje*: za vsak element $a \in K$, ki je različen od 0, mora obstajati tak element $a^{-1} \in K$, da je $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$.

S tem smo našteli vse lastnosti, značilne za obsege. Če pa velja še

(O2) *komutativnost množenja*: $ab = ba$ za vse $a, b \in K$,

pravimo, da je K *komutativen obseg* ali *polje.*

Pravkar naštete lastnosti obsegov niso povsem neodvisne (na primer, druga distributivnostna enakost v (K2) sledi iz prve in komutativnosti množenja). Ni težko dokazati, da sta elementa 0 in 1 enolično določena in prav tako inverzi za seštevanje in množenje. Ker pa bomo podobne dokaze spoznali kasneje v zvezi z vektorskim prostorom, jih bomo na tem mestu opustili.

Poleg obsegov $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ so nadaljnji primeri komutativnih obsegov množica $\mathbb{Q}$ vseh racionalnih števil za običajno seštevanje in množenje in množica $\mathbb{Z}_p$ vseh ostankov po praštevilskem modulu p. Pomemben zgled nekomutativnega obsega pa je algebra Hamiltonovih kvaternionov, ki jo bomo spoznali v razdelku 4.8.

Naloge

1. Pokaži, da je množica $\{x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ polje za običajno seštevanje in množenje realnih števil.

* **2.** Pokaži, da množica $\{x + y2^{1/3} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ ni niti kolobar za običajno seštevanje in množenje realnih števil, množica $\{x + y2^{1/3} + z2^{2/3} : x, y, z \in \mathbb{Q}\}$ pa je polje.

* **3.** Dokaži, da je množica $\mathbb{Z}_p$ vseh ostankov pri deljenju s praštevilom p polje za operaciji $[a] + [b] = [a + b]$ in $[a][b] = [ab]$, kjer označuje $[x]$ ostanek pri deljenju celega števila x s praštevilom p. Kaj pa, če p ni praštevilo?

4. Dokaži, da je množica vseh kompleksnih števil oblike $\{x+yi : x, y \in \mathbb{Q}\}$, kjer je $i^2 = -1$, polje za običajno seštevanje in množenje kompleksnih števil. Kaj pa, če $\mathbb{Q}$ nadomestimo z $\mathbb{Z}$?

5. Množica vseh realnih racionalnih funkcij z imenovalcem, ki ni identično enak 0, je polje.

6. Naj bo $\mathbb{F}$ polje. Vpeljimo v $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ operaciji $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ in $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$. Ali je $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ za ti operaciji obseg? Ali je vsaj kolobar?

1.2. Abstraktni vektorski prostor

Za vsaki množici $\mathcal{V}$ in $\mathcal{W}$ bomo množico vseh urejenih parov (x, y), kjer je x iz $\mathcal{V}$, y pa iz $\mathcal{W}$, označili z $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$. Množico $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ pa bomo ponavadi označili kar z $\mathcal{V}^2$.

DEFINICIJA 1.2.1. Neprazno množico $\mathcal{V}$, opremljeno z operacijo $+$, ki vsakemu paru $(x, y) \in \mathcal{V}^2$ priredi natanko določen element $x + y$ iz $\mathcal{V}$, imenujemo *komutativna* (ali *Abelova*) *grupa* , če ima operacija naslednje lastnosti:

(G1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ za katerekoli elemente x, y, z iz $\mathcal{V}$ (*asociativnost*);

(G2) obstaja tak element $0 \in \mathcal{V}$, da je $x + 0 = x = 0 + x$ za vsak x iz $\mathcal{V}$ (tak element 0 imenujemo *nevtralni element*);

(G3) za vsak x iz $\mathcal{V}$ obstaja tak element $-x$ iz $\mathcal{V}$, da je $x + (-x) = 0 = (-x) + x$ ($-x$ imenujemo *inverz od* x);

(G4) $y + x = x + y$ (*komutativnost*).

Element $-x$, ki zadošča lastnosti (G2), imenujemo *inverz od* x. Če ima operacija le lastnosti (G1)–(G3), pravimo, da je $\mathcal{V}$ za to operacijo *grupa* , vendar tedaj operacije običajno ne označimo s $+$, temveč na primer s $\circ$.

Zgledov komutativnih grup je res mnogo: vsaka od množic $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ je za operacijo seštevanja števil komutativna grupa. Če iz vsake od množic $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ izvzamemo število 0, dobimo komutativno grupo za množenje števil. V prejšnjem razdelku definirani množici $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$ sta komutativni grupi za tam definirano operacijo $+$. Pomembne zglede nekomutativnih grup bomo srečali kasneje. Na tem mestu lahko navedemo kot osnovni zgled množico G_S vseh bijektivnih preslikav dane (toda poljubne) množice S, ki ima vsaj tri elemente, za operacijo komponiranja preslikav. Če je S končna množica z n elementi, $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, imenujemo to grupo *permutacijska grupa* in jo označimo s S_n. Grupa S_n ima $n!$ elementov.

Naj omenimo, da je element 0 z lastnostjo (G2) v grupi enolično določen. Če je namreč $0'$ tudi element s to lastnostjo, potem je hkrati $0 + 0' = 0$ in $0 + 0' = 0'$, torej $0' = 0$.

Prav tako je inverz vsakega elementa x enolično določen. Če namreč y in z oba zadoščata pogoju (G3), torej $y + x = 0 = x + y$ in $z + x = 0 = x + z$, potem imamo

$$z = 0 + z = (y + x) + z = y + (x + z) = y + 0 = y.$$

Definicija 1.2.2. Komutativna grupa $\mathcal{V}$ (z operacijo +) je *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$, če je opremljena z nadaljnjo operacijo, ki vsakemu paru $(\alpha, x) \in \mathbb{F} \times \mathcal{V}$ priredi natanko določen element αx iz $\mathcal{V}$, pri čemer morajo veljati naslednje lastnosti za vsaka x in y iz $\mathcal{V}$ ter vsaka α in β iz $\mathbb{F}$:

(V1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

(V2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

(V3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;

(V4) $1x = x$.

Ker ta operacija kombinira elemente iz $\mathcal{V}$ z elementi iz $\mathbb{F}$, ki niso nujno v $\mathcal{V}$, jo imenujemo *zunanja operacija* ali pa *množenje s skalarji* , pri čemer uporabljamo besedo 'skalarji' za elemente polja.

Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ imenujemo kar *realen vektorski prostor*. Podobno je definiran *kompleksen vektorski prostor*. Iz prejšnjega razdelka poznamo zglede $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$ realnih oziroma kompleksnih vektorskih prostorov. Podobno je za vsako polje $\mathbb{F}$ in naravno število n množica $\mathbb{F}^n$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Ta zgled lahko posplošimo takole:

Zgled 1.2.3. Za vsako množico S naj bo $\mathbb{F}^S$ množica vseh preslikav iz S v $\mathbb{F}$. Definirajmo v $\mathbb{F}^S$ operacijo seštevanja funkcij s predpisom

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s) \quad (s \in S,\ f, g \in \mathbb{F}^S)$$

in zunanjo operacijo s predpisom

$$(\alpha f)(s) = \alpha f(s) \quad (s \in S,\ f \in \mathbb{F}^S,\ \alpha \in \mathbb{F}).$$

Bralec naj sam pokaže, da so izpolnjene vse lastnosti (G1)–(G4) in (V1)–(V4), tako da je $\mathbb{F}^S$ vektorski prostor za ti dve operaciji.

Če vzamemo za S množico $\{1, 2, \ldots, n\}$ in upoštevamo, da je tedaj vsaka funkcija $f : S \to \mathbb{F}$ določena z n-terko svojih vrednosti $(f(1), f(2), \ldots, f(n))$, dobimo tako pravzaprav prostor $\mathbb{F}^n$.

Iz definicije vektorskega prostora se dajo izpeljati druge lastnosti, ki so v primeru prostora $\mathbb{F}^n$ morda očitne.

TRDITEV 1.2.4. *Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Potem je:*

(i) $0x = 0$ *za vsak* $x \in \mathcal{V}$. *(Pri tem je ničla na levi element polja* $\mathbb{F}$*, na desni pa element iz* $\mathcal{V}$*, torej isti simbol označuje dva različna pojma.)*

(ii) $(-1)x = -x$ *za vsak* $x \in \mathcal{V}$.

DOKAZ.

(i) Označimo $y = 0x$. Potem je $y = 0x = (0+0)x = 0x + 0x = y + y$, torej $y = y + y$. Od tod dobimo, ko prištejemo na obeh straneh $-y$, $0 = (-y) + y = (-y) + (y + y) = ((-y) + y) + y = 0 + y = y$, kjer smo upoštevali le računske lastnosti iz definicije vektorskega prostora.

(ii) Dokazati moramo, da je $(-1)x$ inverz od x, torej da je $(-1)x + x = 0 = x + (-1)x$. Zadošča dokazati le prvo od teh dveh enakosti, saj je dokaz druge enak. Imamo

$$(-1)x + x = (-1)x + 1x = ((-1) + 1)x = 0x = 0,$$

kjer smo v zadnjem koraku uporabili že dokazano točko (i).

□

Naloge

1. Pokaži, da je $\mathbb{C}$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (in nad $\mathbb{C}$). Splošneje pokaži, da je vsak vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ obenem vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

2. Pokaži: če sta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ vektorska prostora nad $\mathbb{F}$, potem je njun kartezični produkt $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ tudi vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ za operaciji $(u, v) + (x, y) = (u + x, v + y)$ in $\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$.

3. *Kompleksifikacija realnega vektorskega prostora.* Naj bo $\mathcal{V}$ realni vektorski prostor. Vpeljimo v množico $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ operaciji $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ in $\alpha(x, y) = (ax - by, ay + bx)$, kjer je $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pokaži, da je za ti operaciji $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. (Običajno ga označimo s $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$ in imenujemo kompleksifikacija realnega vektorskega prostora $\mathcal{V}$.)

***4.** Naj bo G množica opremljena z asociativno operacijo $(a, b) \mapsto ab$, ki ima naslednje lastnosti:

(i) obstaja tak $e \in G$, da je $ex = x$ za vsak $x \in G$ (e imenujemo *leva enota*);

(ii) za vsak $x \in G$ obstaja tak $y \in G$, da je $yx = e$ (y je *levi inverz od* x).

Pokaži, da je tedaj G grupa za to operacijo (se pravi, e je tudi desna enota in levi inverz vsakega elementa je tudi desni inverz).

5. Naj bo p praštevilo. Koliko elementov ima vektorski prostor $\mathbb{Z}_p^n$?

6. Pokaži, da lastnost $1x = x$ ne sledi iz preostalih predpostavk za vektorski prostor. (Navodilo: vpelji v $\mathbb{R}^2$ množenje s skalarji, npr. kot $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0)$.)

* **7.** Pokaži, da komutativnost seštevanja vektorjev sledi iz ostalih lastnosti vektorskega prostora. (Navodilo: Razvij $(1+1)(x+y)$ na dva načina, tako da upoštevaš distributivnost najprej v prvem, nato v drugem faktorju.)

1.3. Vektorski podprostori

DEFINICIJA 1.3.1. Podmnožica $\mathcal{U}$ vektorskega prostora $\mathcal{V}$ je *vektorski podprostor* (krajše bomo rekli kar podprostor), če je sama zase vektorski prostor za isti operaciji, zoženi na $\mathcal{U}$.

TRDITEV 1.3.2. *Neprazna podmnožica $\mathcal{U}$ je vektorski podprostor v vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ nad poljem $\mathbb{F}$ natanko tedaj, ko je:*

(i) *$x+y\in\mathcal{U}$ za vsaka $x,y\in\mathcal{U}$ in*

(ii) *$\alpha x\in\mathcal{U}$ za vsak $\alpha\in\mathbb{F}$ in vsak $x\in\mathcal{U}$.*

DOKAZ. Če sta izpolnjena pogoja (i) in (ii), je podmnožica $\mathcal{U}$ opremljena z dvema operacijama, ki zadoščata vsem zahtevam za vektorski prostor. Element 0 je namreč v $\mathcal{U}$, ker je $0=0x$ za katerikoli $x\in\mathcal{U}$. Prav tako je za vsak $x\in\mathcal{U}$ tudi $-x$ v $\mathcal{U}$, ker je $-x=(-1)x$. Druge zahteve za vektorski prostor so očitno izpolnjene. □

Kadar sta za podmnožico $\mathcal{U}$ izpolnjena pogoja (i) in (ii) iz prejšnje trditve, pravimo, da je $\mathcal{U}$ *zaprta za seštevanje in množenje s skalarji* .

V dokazu prejšnje trditve lahko opazimo naslednje dejstvo:

POSLEDICA 1.3.3. *Vsak vektorski podprostor v vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ vsebuje vektor $0\in\mathcal{V}$.*

DEFINICIJA 1.3.4. *Linearna kombinacija* vektorjev $x_1,x_2,\ldots,x_n$ v vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ nad poljem $\mathbb{F}$ je vsak vektor oblike

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n, \tag{1.3.1}$$

kjer so *koeficienti* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ iz $\mathbb{F}$.

Vsoto (1.3.1) lahko s sumacijskim znakom napišemo krajše kot

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_jx_j.$$

TRDITEV 1.3.5. *Neprazna podmnožica $\mathcal{U}$ vektorskega prostora $\mathcal{V}$ nad poljem $\mathbb{F}$ je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je $\alpha x+y\in\mathcal{U}$ za vsaka $x,y\in\mathcal{U}$ in vsak $\alpha\in\mathbb{F}$. Tedaj je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz $\mathcal{U}$ element podprostora $\mathcal{U}$.*

DOKAZ. Če je $\mathcal{U}$ vektorski podprostor in so $x_1,\ldots,x_n$ poljubni elementi iz $\mathcal{U}$, potem so za poljubne $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ iz $\mathbb{F}$ tudi vektorji $\alpha_1x_1,\ldots,\alpha_nx_n$ vsi v $\mathcal{U}$. Zato so v $\mathcal{U}$ zaporedoma tudi vse vsote $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$, $(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)+\alpha_3x_3$, …, $\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n$. (Formalen dokaz tega prepuščamo bralcu kot vajo iz indukcije.) Kot poseben primer je v $\mathcal{U}$ tudi vektor $\alpha x+y=\alpha x+1y$ za vsaka $x,y\in\mathcal{U}$ in vsak $\alpha\in\mathbb{F}$.

Predpostavimo sedaj, da je $\mathcal{U}$ taka podmnožica v $\mathcal{V}$, da je $\alpha x + y \in \mathcal{U}$ za vsaka $x, y \in \mathcal{U}$ in vsak $\alpha \in \mathbb{F}$. Potem je, kot poseben primer, ko je $\alpha = 1$, tudi $x + y \in \mathcal{U}$. Da bi pokazali, da je $\mathcal{U}$ podprostor, zadošča sedaj pokazati, da je $\alpha x \in \mathcal{U}$ za vsak $x \in \mathcal{U}$ in vsak $\alpha \in \mathbb{F}$. To sledi iz enakosti $\alpha x = \alpha x + 0$, ker že vemo, da je $0 \in \mathcal{U}$. $\square$

V vsakem vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ imamo dva očitna podprostora: $\mathcal{V}$ in podprostor $\{0\}$, ki vsebuje le vektor 0 in ga bomo odslej označevali kar z 0. Poglejmo, kaj so vsi možni podprostori v $\mathbb{R}^3$.

Zgled 1.3.6. Poleg podprostorov 0 in $\mathbb{R}^3$ so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$ še vse premice skozi koordinatno izhodišče in vse ravnine skozi koordinatno izhodišče.

Ker so premice in ravnine skozi koordinatno izhodišče zaprte za seštevanje vektorjev in množenje s skalarji, so to vektorski podprostori. Pokazati moramo, da ni drugih podprostorov. Naj bo torej $\mathcal{U}$ poljuben vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$. Če $\mathcal{U} \neq 0$, naj bo $a \in \mathcal{U}$ poljuben neničelni vektor (torej $a \neq 0$). Označimo z $\mathbb{R}a$ množico vseh večkratnikov vektorja a, torej $\mathbb{R}a = \{\alpha a : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Geometrijsko gledano je $\mathbb{R}a$ premica skozi izhodišče in je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$ vsebovan v podprostoru $\mathcal{U}$. Če je $\mathcal{U} \neq \mathbb{R}a$, potem obstaja v $\mathcal{U}$ vektor b, ki ni na premici $\mathbb{R}a$, torej $b \neq \alpha a$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem je množica $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b := \{\alpha a + \beta b : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ravnina skozi izhodišče, napeta na vektorja a in b, torej vektorski podprostor, vsebovan v $\mathcal{U}$. Če $\mathcal{U}$ ni enak tej ravnini, potem obstaja vektor $c \in \mathcal{U}$, ki ni v ravnini $\mathbb{R}a + \mathbb{R}b$. Toda tedaj vektorji a, b in c ne ležijo v isti ravnini in iz elementarne geometrije vemo, da lahko vsak vektor x iz $\mathbb{R}^3$ izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev a, b in c. Ker so a, b in c v $\mathcal{U}$, je v $\mathcal{U}$ tudi njihova linearna kombinacija x po trditvi 1.3.5. Torej je tedaj v $\mathcal{U}$ katerikoli vektor x iz $\mathbb{R}^3$ in zato je v tem primeru $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$.

Ravnina ali premica, ki ne gre skozi 0, pa ni vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$, saj podprostor vedno vsebuje vektor 0 po posledici 1.3.3.

Zgled 1.3.7. Naj bo S poljubna neskončna podmnožica v $\mathbb{R}$. Potem je množica $\mathbb{R}[x]$ vseh polinomov z realnimi koeficienti podmnožica prostora vseh funkcij $\mathbb{R}^S$ iz zgleda 1.2.3. (Kako pa je v primeru, ko je S končna?) Bralec naj pokaže, da je zaprta za linearne kombinacije, torej je $\mathbb{R}[x]$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^S$. Za vsako naravno število n naj $\mathbb{R}_n[x]$ označuje množico vseh polinomov stopnje manjše ali enake n. Pokažite, da je $\mathbb{R}_n[x]$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}[x]$. Enako velja, če $\mathbb{R}$ nadomestimo s $\mathbb{C}$.

Dokaz naslednje trditve je preprost in ga prepuščamo bralcu za vajo.

Trditev 1.3.8. *Presek poljubne družine vektorskih podprostorov vektorskega prostora $\mathcal{V}$ je vektorski podprostor v $\mathcal{V}$.*

Definicija 1.3.9. *Linearna ogrinjača* $[S]$ podmnožice S v vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{F}$ je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev iz S, torej

$$[S] = \{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j : \alpha_j \in \mathbb{F},\ x_j \in S,\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

TRDITEV 1.3.10. *Linearna ogrinjača $[S]$ katerekoli podmnožice S vektorskega prostora $\mathcal{V}$ je vektorski podprostor v $\mathcal{V}$ in je enaka preseku vseh vektorskih podprostorov, ki vsebujejo množico S. Torej je podprostor $[S]$ vsebovan v vsakem vektorskem podprostoru $\mathcal{U}$ prostora $\mathcal{V}$, ki vsebuje S.*

DOKAZ. Naj bosta x in y vektorja iz $[S]$, torej $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$ in $y = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_n y_n$ za kake elemente $x_1, \ldots, x_m$ in $y_1, \ldots, y_n$ iz S in skalarje $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ in $\beta_1, \ldots, \beta_n$ iz $\mathbb{F}$. Potem je vsota

$$x + y = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_n y_n$$

tudi linearna kombinacija vektorjev iz S, torej je $x + y \in [S]$. Podobno je $\alpha x \in [S]$ za vsak $x \in [S]$ in vsak $\alpha \in \mathbb{F}$. Torej je množica $[S]$ zaprta tako za seštevanje kot za množenje s skalarji, zato je $[S]$ vektorski podprostor.

Če je $\mathcal{U}$ vektorski podprostor v $\mathcal{V}$ in $S \subseteq \mathcal{U}$, potem mora $\mathcal{U}$ vsebovati tudi vse linearne kombinacije vektorjev iz S po trditvi 1.3.5, torej je $[S] \subseteq \mathcal{U}$. Od tod sledi, da je podprostor $[S]$ vsebovan v preseku P vseh tistih podprostorov $\mathcal{U}$, ki vsebujejo S. Toda ta presek P je vsebovan v $[S]$ (saj v tvorbi preseka nastopa tudi $[S]$), zato je $P = [S]$. □

Naloge

1. Kdaj je množica $\mathcal{U} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta\}$ vektorski podprostor?

2. Pokaži, da so naslednje podmnožice vektorski podprostori v prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vseh funkcij iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$:

- (i) množica vseh sodih funkcij (funkcija je soda, če je $f(-t) = f(t)$ za vsak $t \in \mathbb{R}$);
- (ii) množica vseh lihih funkcij ($f(-t) = -f(t)$);
- (iii) množica vseh zveznih funkcij;
- (iv) množica vseh k-krat odvedljivih funkcij, kjer je $k \in \mathbb{N}$.

3. Ali je množica vseh funkcij f iz $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ki zadoščajo pogoju $f(1) = 2$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? Kaj pa množica vseh funkcij, ki zadoščajo pogoju $f(1) = f(2)$?

4. Kdaj natančno je unija dveh vektorskih podprostorov danega vektorskega prostora spet vektorski podprostor?

* **5.** Pokaži: če je vektorski podprostor nad $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ vsebovan v uniji dveh vektorskih podprostorov, mora biti vsebovan vsaj v enem od njiju.

6. Pokaži: če za vektorje $x, y_1, \ldots y_n$ v vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ velja $2x + y_1 + \ldots + y_n = 0$, potem je x v vsakem vektorskem podprostoru, ki vsebuje vektorje $y_1, \ldots, y_n$.

1.4. Linearna neodvisnost, ogrodja in baze

1.4.1. Linearna neodvisnost

DEFINICIJA 1.4.1. Končna podmnožica $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ vektorskega prostora nad $\mathbb{F}$ je *linearno neodvisna*, če je edina linearna kombinacija vektorjev iz S, ki je enaka 0, tista, pri kateri so vsi koeficienti enaki 0. Z drugimi besedami, S je linearno neodvisna, če je $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$ (kjer je $\alpha_j \in \mathbb{F}$ za vse j) samo v primeru, ko je $\alpha_j = 0$ za vse $j = 1, \ldots, n$. Neskončna podmnožica pa je linearno neodvisna, če so linearno neodvisne vse njene končne podmnožice. Množica je *linearno odvisna*, če ni linearno neodvisna.

Mnogokrat bomo rekli, da so kar vektorji $x_1, \ldots, x_n$ *linearno neodvisni*, če je linearno neodvisna množica $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

ZGLED 1.4.2. Množica $S = \{x\}$ z enim samim elementom je linearno neodvisna natanko tedaj, ko je $x \neq 0$. Če je namreč $x = 0$, je na primer $1x = 0$, zato je tedaj $\{x\}$ linearno odvisna. Če pa je $x \neq 0$, potem je enakost $\alpha x = 0$ izpolnjena le v primeru, ko je $\alpha = 0$, saj bi v nasprotnem primeru imeli $x = 1x = (\alpha^{-1}\alpha)x = \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}0 = 0$.

ZGLED 1.4.3. Dva vektorja v $\mathbb{R}^3$ sta linearno neodvisna natanko tedaj, ko nista kolinearna. Trije vektorji v $\mathbb{R}^3$ pa so linearno neodvisni natanko tedaj, ko niso koplanarni. Razmislek o tem prepuščamo bralcu. Pri tem si lahko pomaga z naslednjo trditvijo:

TRDITEV 1.4.4. *Podmnožica vektorskega prostora je linearno odvisna natanko tedaj, ko se da vsaj eden od njenih vektorjev izraziti kot linearna kombinacija preostalih.*

DOKAZ. Predpostavimo, da je množica $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ linearno odvisna. Potem obstaja linearna kombinacija

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0, \tag{1.4.1}$$

kjer niso vsi koeficienti α_j enaki 0. Brez izgube splošnosti smemo vzeti, da je kar $\alpha_1 \neq 0$, sicer zamenjamo vrstni red vektorjev. Tedaj lahko iz enakosti (1.4.1) izrazimo

$$x_1 = (-\frac{\alpha_2}{\alpha_1})x_2 + \ldots + (-\frac{\alpha_n}{\alpha_1})x_n,$$

kar pove, da je vektor x_1 linearna kombinacija preostalih vektorjev $x_2, \ldots, x_n$.

Za dokaz v obratno smer privzemimo, da je na primer vektor x_1 linearna kombinacija preostalih, torej

$$x_1 = \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$$

za kake koeficiente $\beta_2, \ldots, \beta_n$. Ker zadnjo enakost lahko napišemo v obliki

$$(-1)x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n = 0$$

in $-1 \neq 0$, so tedaj vektorji $x_1, \ldots, x_n$ linearno odvisni. S tem smo trditev 1.4.4 dokazali za končne podmnožice. Od tod jo lahko hitro izpeljemo tudi za neskončne podmnožice, kar pa prepuščamo bralcu. $\square$

TRDITEV 1.4.5. *Če je S linearno neodvisna podmnožica vektorskega prostora $\mathcal{V}$, je linearno neodvisna tudi vsaka njena podmnožica.*

DOKAZ. Naj bo T podmnožica v S. Vsaka linearna kombinacija vektorjev iz T je potem obenem linearna kombinacija vektorjev iz S, zato je lahko enaka 0 samo tedaj, ko so vsi koeficienti enaki 0. $\square$

ZGLED 1.4.6. Če je $0 \in S$, je S linearno odvisna, saj je $1 \cdot 0 + 0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$ za poljubne vektorje $x_1, \ldots, x_n$.

ZGLED 1.4.7. Monomi $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ so linearno neodvisni v vektorskem prostoru $\mathbb{R}[x]$ vseh realnih polinomov. Če je namreč $a_0 1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n =: p(x)$ polinom, ki je enak 0 za vse $x \in \mathbb{R}$, morajo biti vsi njegovi koeficienti a_j enaki 0, saj ima sicer polinom stopnje n kvečjemu n ničel.

ZGLED 1.4.8. Ali je množica

$$\{(1,0,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,-1),(0,1,-1,1)\}$$

v $\mathbb{R}^4$ linearno neodvisna?

Vzemimo, da je

$$\alpha_1(1,0,1,0) + \alpha_2(1,1,0,1) + \alpha_3(2,0,1,-1) + \alpha_4(0,1,-1,1) = 0$$

za kake $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Vektor na levi strani te enakosti je

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4).$$

Če naj bo ta vektor enak vektorju 0, morajo biti 0 vse njegove komponente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & & & = & 0 \\
 & & \alpha_2 & + & & & \alpha_4 & = & 0 \\
\alpha_1 & + & & & \alpha_3 & - & \alpha_4 & = & 0 \\
 & & \alpha_2 & - & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0.
\end{array}$$

To je sistem enačb z neznankami $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Ko od prve enačbe odštejemo tretjo, dobimo $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Ko to odštejemo od četrte enačbe, sledi $\alpha_3 = 0$ in $\alpha_2 = -\alpha_4$. Iz tretje enačbe nato sledi še $\alpha_1 = \alpha_4$. Koeficient α_4 pa ostane poljuben, zato so vektorji linearno odvisni. Če izberemo na primer $\alpha_4 = 1$, imamo $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ in $\alpha_3 = 0$. Torej je

$$1(1,0,1,0) - 1(1,1,0,1) + 0(2,0,1,-1) + 1(0,1,-1,1) = 0.$$

1.4.2. Ogrodja

DEFINICIJA 1.4.9. Podmnožica T vektorskega prostora $\mathcal{V}$ je *ogrodje za* $\mathcal{V}$, če je vsak vektor iz $\mathcal{V}$ linearna kombinacija vektorjev iz T.

T je torej ogrodje prostora $\mathcal{V}$ natanko tedaj, ko je $[T] = \mathcal{V}$. Primer ogrodja je kar $T = \mathcal{V}$, vendar nas bodo zanimala predvsem končna ogrodja.

LEMA 1.4.10. *Če je T ogrodje, R pa taka podmnožica vektorskega prostora $\mathcal{V}$, da je vsak vektor iz T linearna kombinacija vektorjev iz R, potem je tudi R ogrodje.*

Dokaz. Ker je T ogrodje, lahko vsak vektor $x \in \mathcal{V}$ izrazimo kot

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, \tag{1.4.2}$$

kjer so $x_i \in T$ (in $\alpha_i \in \mathbb{F}$). Po predpostavki lahko vsak x_i izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev iz R,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} y_{i,j}, \tag{1.4.3}$$

kjer so $y_{i,j} \in R$ (in $\alpha_{i,j} \in \mathbb{F}$). Ko vstavimo izraze za x_i iz enakosti (1.4.3) v enakost (1.4.2), dobimo, da je x linearna kombinacija vektorjev iz množice R. Ker se torej da vsak vektor x iz $\mathcal{V}$ izraziti kot linearna kombinacija vektorjev iz R, je R ogrodje. $\square$

Označimo s $|T|$ moč množice T (to je število njenih elementov).

Trditev 1.4.11. *Če je T ogrodje, S pa linearno neodvisna podmnožica vektorskega prostora $\mathcal{V}$, potem je $|S| \leq |T|$. Katerakoli linearno neodvisna podmnožica ima torej kvečjemu toliko elementov kot katerokoli ogrodje.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali le za končne podmnožice, ker jo bomo potrebovali le v tem primeru.

Naj bo $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ linearno neodvisna podmnožica,

$$T = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

pa ogrodje vektorskega prostora $\mathcal{V}$ (pri čemer so x_i med seboj različni in prav tako y_j). Pokazati moramo, da je $m \leq n$. Ker je T ogrodje, lahko vektor x_1 izrazimo kot

$$x_1 = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n, \tag{1.4.4}$$

kjer niso vsi koeficienti α_j enaki 0 (sicer bi bil $x_1 = 0$ in S linearno odvisna). Brez izgube splošnosti smemo privzeti, da $\alpha_1 \neq 0$ (sicer zamenjamo vrstni red vektorjev y_j). Potem lahko izrazimo iz enakosti (1.4.4) vektor y_1 kot

$$y_1 = \beta_1 x_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n. \tag{1.4.5}$$

(Pri tem je $\beta_1 = 1/\alpha_1$ in $\beta_j = -\alpha_j/\alpha_1$ za $j \geq 2$.) Po lemi 1.4.10 je tedaj tudi množica $T_1 := \{x_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ogrodje prostora $\mathcal{V}$, saj je y_1 linearna kombinacija vektorjev iz T_1, preostali vektorji iz T pa so kar vsebovani v T_1.

Ker je T_1 ogrodje, lahko x_2 izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev iz T_1,

$$x_2 = \gamma_1 x_1 + \delta_2 y_2 + \ldots + \delta_n y_n, \tag{1.4.6}$$

pri čemer niso vsi koeficienti δ_j enaki 0. Če bi bili namreč vsi δ_j enaki 0, bi iz (1.4.6) sledilo, da je $x_2 = \gamma_1 x_1$, kar bi nasprotovalo linearni neodvisnosti vektorjev x_1, x_2 (saj sta to vektorja linearno neodvisne množice S). Brez izgube splošnosti lahko privzamemo, da je $\delta_2 \neq 0$ (sicer zamenjamo vrstni red vektorjev y_j). Potem lahko iz (1.4.6) izrazimo vektor y_2 kot linearno kombinacijo vektorjev iz množice $T_2 := \{x_1, x_2, y_3, \ldots, y_n\}$. Ker so preostali vektorji iz T_1 vsebovani v T_2, je vsak vektor iz T_1 linearna kombinacija vektorjev iz T_2. Ker je T_1 ogrodje, pove lema 1.4.10, da je tudi T_2 ogrodje.

Postopek, začet v prejšnjih dveh odstavkih, lahko nadaljujemo. Če bi bilo $m > n$, bi ta postopek lahko nadaljevali, dokler ne bi bi dobili množice $T_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ki bi bila ogrodje. Toda potem bi se moral tudi vektor x_{n+1} dati izraziti kot linearna kombinacija vektorjev $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kar pa bi nasprotovalo linearni neodvisnosti množice S (glej trditvi 1.4.5 in 1.4.4). □

1.4.3. Baze

Definicija 1.4.12. *Baza* vektorskega prostora je linearno neodvisno ogrodje.

Zgled 1.4.13. V prostoru $\mathbb{R}^n$ naj bo

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0),$$

kjer je 1 na i-tem mestu. Množica $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ je baza prostora $\mathbb{R}^n$. Vsak vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ lahko namreč izrazimo kot $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, zato je S ogrodje. Če je kaka linearna kombinacija $x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ enaka 0, morajo biti vsi koeficienti x_j enaki 0, saj je $x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ vektor s koordinatami $x_1, \ldots, x_n$. Torej je S tudi linearno neodvisna množica, potemtakem ogrodje. Seveda enak razmislek velja tudi v $\mathbb{C}^n$ in v $\mathbb{F}^n$ za vsako polje $\mathbb{F}$. To bazo S imenujemo *standardna* (ali *kanonična*) baza prostora $\mathbb{F}^n$. Poleg te obstajajo v $\mathbb{F}^n$ seveda še številne druge baze. Na primer v $\mathbb{R}^3$ tvorijo katerikoli trije nekoplanarni vektorji bazo.

Zgled 1.4.14. Množica $\{1, x, x^2, \ldots\}$ je baza prostora polinomov $\mathbb{R}[x]$,

$$\{1, x, \ldots, x^n\}$$

pa baza podprostora $\mathbb{R}_n[x]$ vseh polinomov do stopnje n. V zgledu 1.4.7 smo namreč videli, da so monomi $1, x, x^2, \ldots$ linearno neodvisni in očitno je vsak polinom njihova linearna kombinacija.

Da se dokazati, da v vsakem vektorskem prostoru, različnem od 0, obstaja baza, vendar so baze lahko neskončne podmnožice in dokaz temelji na Zornovi lemi.

Tukaj nas bodo zanimali le prostori, v katerih obstajajo končne baze.

Trditev 1.4.15. *Če v vektorskem prostoru $\mathcal{V} \neq 0$ obstaja kako končno ogrodje, potem obstaja tudi končna baza.*

Dokaz. Naj bo $T = \{y_1, \ldots, y_n\}$ končno ogrodje za $\mathcal{V}$. Če je T linearno neodvisna množica, potem je T že končna baza. Privzemimo torej, da je T linearno odvisna množica. Po trditvi 1.4.4 se da potem vsaj en vektor iz T izraziti kot linearna kombinacija preostalih. Brez izgube splošnosti lahko vzamemo, da je y_n linearna kombinacija vektorjev iz množice $T_1 := \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ (sicer bi zamenjali vrstni red vektorjev y_j). Iz leme 1.4.10 sledi, da je tudi T_1 ogrodje. Če je T_1 linearno neodvisna množica, je to iskana baza. Če pa je T_1 linearno odvisna, lahko spet enega od vektorjev, vzeti smemo, da y_{n-1}, izrazimo kot linearno kombinacijo preostalih in tako dobimo novo ogrodje $T_2 = \{y_1, \ldots, y_{n-2}\}$. Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do linearno neodvisnega ogrodja ali pa so vse množice, ki jih tako dobimo, linearno odvisne. V drugem primeru bi v zadnjem koraku postopka dobili ogrodje z enim samim elementom, recimo $\{y_1\}$, ki bi bilo linearno odvisno. To je možno le, če je $y_1 = 0$ in (ker je $\{y_1\}$ ogrodje) $\mathcal{V} = 0$. Toda po predpostavki je $\mathcal{V} \neq 0$, zato se mora postopek končati z linearno neodvisnim ogrodjem, torej bazo. □

ZGLED 1.4.16. Poiščimo kako bazo vektorskega podprostora

$$\mathcal{U} = [(1,2,1,2),(1,-1,-1,1),(1,-4,-3,0)]$$

v $\mathbb{R}^4$. Označimo $a = (1,2,1,2)$, $b = (1,-1,-1,1)$ in $c = (1,-4,-3,0)$. Ugotovimo lahko, da so ti trije vektorji linearno odvisni, in sicer je $c = 2b - a$. Zato je že množica $\{a,b\}$ ogrodje za $\mathcal{U}$. Ker sta vektorja a in b linearno neodvisna, je to baza.

TRDITEV 1.4.17. *Vse baze v vektorskem prostoru imajo enako moč (število elementov).*

DOKAZ. Trditev bomo dokazali le v primeru, ko obstaja v vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ kako ogrodje T, ki ima končno mnogo elementov. Ker je vsaka baza B linearno neodvisna množica, je po trditvi 1.4.11 $|B| \leq |T|$, torej imajo tedaj vse baze prostora $\mathcal{V}$ končno mnogo elementov. Če sta B_1 in B_2 bazi, potem je po trditvi 1.4.11 hkrati $|B_1| \leq |B_2|$ (ker je B_1 linearno neodvisna, B_2 pa ogrodje) in $|B_2| \leq |B_1|$, torej res $|B_1| = |B_2|$. □

DEFINICIJA 1.4.18. Moč baze vektorskega prostora $\mathcal{V}$ imenujemo *razsežnost* ali *dimenzija* prostora $\mathcal{V}$ in označimo $\dim \mathcal{V}$.

Definicija je smiselna, ker imajo po trditvi 1.4.17 vse baze enako število elementov. Vektorski prostor je *končnorazsežen*, če ima kako končno bazo.

TRDITEV 1.4.19. *V n-razsežnem vektorskem prostoru ($n \in \mathbb{N}$) je vsaka linearno neodvisna množica z n elementi že baza.*

DOKAZ. Naj bo $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ linearno neodvisna množica in x poljuben vektor iz $\mathcal{V}$. Množica $S \cup \{x\}$ je linearno odvisna, saj ima $n+1$ elementov, medtem ko ima vsaka linearno neodvisna množica kvečjemu n elementov (ker obstaja v $\mathcal{V}$ baza, torej ogrodje, ki ima n elementov). Zato obstaja linearna kombinacija $\alpha x + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$, kjer niso vsi koeficienti enaki 0. Če bi bil α enak 0, bi od tod sledilo, da je S linearno odvisna. Ker je S linearno neodvisna, mora biti torej $\alpha \neq 0$ in lahko iz zadnje enakosti izrazimo x kot linearno kombinacijo vektorjev $x_1, \ldots, x_n$. S tem smo pokazali, da je S tudi ogrodje, se pravi baza. □

TRDITEV 1.4.20. *Če je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ baza vektorskega prostora $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{F}$, lahko vsak vektor $x \in \mathcal{V}$ enolično izrazimo kot linearno kombinacijo*

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j, \quad (\alpha_j \in \mathbb{F}). \tag{1.4.7}$$

Zapisu (1.4.7) pravimo *razvoj vektorja x po bazi B.*

Dokaz. Ker je vsaka baza ogrodje, lahko vsak vektor $x \in \mathcal{V}$ res izrazimo v obliki (1.4.7), dokazati je treba le enoličnost tega zapisa. Naj bo

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j \quad (\beta_j \in \mathbb{F})$$

kak nadaljnji tak zapis. Ko odštejemo od te enakosti enakost (1.4.7), dobimo

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) b_j.$$

Zaradi linearne neodvisnosti vektorjev b_j sledi od tod $\beta_j - \alpha_j = 0$ za vsak j, torej je $\beta_j = \alpha_j$ in razvoj vektorja x po bazi B je enoličen. □

Dokazi naslednjih treh trditev niso zelo težki in jih bomo pustili kar bralcu za vajo.

Trditev 1.4.21. *Vsako linearno neodvisno množico S v vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ lahko dopolnimo do baze: obstaja baza za $\mathcal{V}$, ki vsebuje S.*

Namig za dokaz. Če S ni baza, obstaja vektor $v_1 \in \mathcal{V}$, ki ni linearna kombinacija vektorjev iz S. Potem je množica $S_1 := S \cup \{v_1\}$ linearno neodvisna. Če S_1 še ni baza, ponovimo postopek ... □

Trditev 1.4.22. *Za vsako ogrodje $T \neq \{0\}$ vektorskega prostora $\mathcal{V}$ obstaja podmnožica $B \subseteq T$, ki je baza za $\mathcal{V}$.*

Trditev 1.4.23. *Če je T tako ogrodje vektorskega prostora $\mathcal{V}$, da lahko vsak vektor $x \in \mathcal{V}$ izrazimo enolično kot linearno kombinacijo vektorjev iz T, potem je T baza.*

Naloge

1. Pokaži, da je za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ množica $\{(1,1,1,1), (1,\alpha,\alpha^2,0)\}$ linearno neodvisna in jo dopolni do baze prostora $\mathbb{R}^4$.

2. Pokaži, da je množica $T = \{(1,j,j^2) : j \in \mathbb{N}\}$ ogrodje prostora $\mathbb{R}^3$ in poišči kako podmnožico v T, ki je baza za $\mathbb{R}^3$.

3. Navedi kak zgled ogrodja s petimi elementi v $\mathbb{R}^4$. Ali je tako ogrodje baza za $\mathbb{R}^4$? Na koliko načinov se da vektor 0 izraziti kot linearna kombinacija vektorjev iz takega ogrodja?

4. Če sta $\mathcal{U}_1$ in $\mathcal{U}_2$ podprostora vektorskega prostora $\mathcal{V}$, naj bo $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ množica vseh vsot $u_1 + u_2$, kjer je $u_1 \in \mathcal{U}_1$ in $u_2 \in \mathcal{U}_2$. Pokaži, da je $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ vektorski podprostor v $\mathcal{V}$; imenujemo ga *vsota podprostorov* $\mathcal{U}_1$ in $\mathcal{U}_2$. Pokaži tudi, da je $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = [\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2]$. Definiraj vsoto poljubne družine vektorskih podprostorov.

5. Vsoto podprostorov $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ (glej prejšnjo nalogo) imenujemo *direktna vsota*, če je $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = 0$; tedaj jo označimo z $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$. Pokaži, da je vsota $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ direktna natanko tedaj, ko lahko vsak vektor $x \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ izrazimo *enolično* kot $x = u_1 + u_2$, kjer je $u_j \in \mathcal{U}_j$ za $j = 1, 2$. Posploši na več kot dva sumanda.

6. Naj bosta $\mathcal{U}_1$ in $\mathcal{U}_2$ vektorska podprostora vektorskega prostora $\mathcal{V}$ z bazama B_1 in B_2 (zaporedoma). Pokaži: $B_1 \cup B_2$ je ogrodje za $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ in je baza natanko tedaj, ko je $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = 0$.

7. Pokaži, da za vsaka podprostora $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ vektorskega prostora $\mathcal{V}$ velja

$$\dim(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) + \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = \dim \mathcal{U}_1 + \dim \mathcal{U}_2.$$

8. Pokaži, da za vektorske podprostore danega vektorskega prostora v splošnem ne velja enakost $\mathcal{U}_1 \cap (\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3) = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3$, pač pa le inkluzija $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3 \subseteq \mathcal{U}_1 \cap (\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3)$. Nadalje pokaži, da enakost velja, če je $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$.

9. V vektorskem prostoru $\mathbb{C}_n[z]$ vseh kompleksnih polinomov do stopnje n naj bo $\mathcal{U}$ podmnožica vseh tistih polinomov, ki imajo vrednost 0 v izbranih točkah $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, kjer je $m \leq n$. Pokaži, da je $\mathcal{U}$ vektorski podprostor in določi kako njegovo bazo. Koliko je $\dim \mathcal{U}$? Kaj pa, če zahtevamo, da je v vsaki od točk α_j ničla večkratnosti n_j?

10. Naj bo $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ podmnožica vektorskega prostora $\mathcal{V}$.

(i) Naj bo S_1 množica, ki jo dobimo iz S tako, da nadomestimo enega od vektorjev, recimo x_i, z αx_i, kjer je $\alpha \neq 0$. Pokaži, da je S linearno neodvisna natanko tedaj, ko je S_1 linearno neodvisna, in da je $[S_1] = [S]$.

(ii) Naj bo S_2 množica, ki ima iste elemente kot S, razen elementa x_i, ki je nadomeščen z $x_i + \alpha x_j$, kjer je $j \neq i$ in $\alpha \neq 0$. Pokaži, da je S_2 linearno neodvisna natanko tedaj, ko je S linearno neodvisna in da je $[S_2] = [S]$.

11. Če sta S in T taki podmnožici vektorskega prostora $\mathcal{V}$, da je vsak element iz S linearna kombinacija elementov iz T in obratno, pokaži, da je potem $[S] = [T]$.

1.5. Evklidski in unitarni prostori

1.5.1. Skalarni produkt

Po zgledu ravninskih vektorjev lahko definiramo skalarni produkt v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^n$ za vsak n. Skalarni produkt vektorjev $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in $y = (y_1, \ldots, y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ je

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j. \tag{1.5.1}$$

S podobno formulo bi sicer lahko definirali skalarni produkt v vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ nad poljubnim poljem: izbrali bi kako bazo B za $\mathcal{V}$, razvili vektorja x in y po tej bazi, označili z x_j in y_j koeficiente razvoja po tej bazi in nato definirali $\langle x, y \rangle$ s formulo (1.5.1). Vendar bi tu nastal problem z dolžinami vektorjev. S pomočjo skalarnega produkta želimo namreč definirati dolžino vektorja kot $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. V splošnem polju pa ne obstajajo kvadratni koreni elementov (na primer v polju $\mathbb{Q}$ ne obstaja $\sqrt{2}$).

Zato se bomo pri definiciji skalarnega produkta omejili le na vektorske prostora nad $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. Namesto s formulo bomo skalarni produkt definirali s ključnimi lastnostmi.

DEFINICIJA 1.5.1. *Skalarni produkt* na realnem vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ je preslikava, ki vsakemu paru vektorjev $(x, y) \in \mathcal{V}^2$ priredi realno število $\langle x, y\rangle$, pri čemer so izpolnjeni naslednji pogoji za vse $x, y, z \in \mathcal{V}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ (*linearnost v prvem faktorju*);

(ii) $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$ (*simetričnost*);

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ za vsak $x \in \mathcal{V}$ (*nenegativnost*);

(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ samo v primeru, ko je $x = 0$ (*definitnost*).

Namesto (i) bi lahko zahtevali naslednji dve lastnosti:

(i') $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ za vse $x, y, z \in \mathcal{V}$ in

(i") $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ za vse $x, y \in \mathcal{V}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bralec naj pokaže, da (i) velja natanko tedaj, ko hkrati veljata (i') in (i"). Iz (i) in (ii) izpeljemo, da je skalarni produkt linearen tudi v drugem faktorju:

$$\langle z, \alpha x + \beta y\rangle = \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle = \alpha\langle z, x\rangle + \beta\langle z, y\rangle.$$

Nadalje sledi, da je

$$\langle 0, x\rangle = 0$$

za vsak $x \in \mathcal{V}$, saj je $\langle 0, x\rangle = \langle 0 \cdot 0, x\rangle = 0\langle 0, x\rangle = 0$ po lastnosti (i"), uporabljeni za $\alpha = 0$, vektor 0 namesto x in x namesto y.

Poglejmo sedaj, kako lahko s skalarnim produktom definiramo dolžino vektorjev.

DEFINICIJA 1.5.2. *Norma* ali *dolžina* vektorja x v prostoru s skalarnim produktom je definirana z

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Od dolžine vektorjev pričakujemo lastnosti, naštete v naslednji definiciji:

DEFINICIJA 1.5.3. Norma na realnem ali kompleksnem vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ je preslikava, ki vsakemu $x \in \mathcal{V}$ priredi nenegativno realno število $\|x\|$, pri čemer so izpolnjene naslednje zahteve:

(Ni) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*trikotniška neenakost*);

(Nii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ za vsak $x \in \mathcal{V}$ ter $\alpha \in \mathbb{R}$;

(Niii) $\|x\| = 0$ samo v primeru, ko je $x = 0$.

Da je $\|0\| = 0$, sledi iz (Nii): $\|0\| = \|0 \cdot 0\| = 0\|0\| = 0$.

Preveriti moramo, ali norma, ki jo porodi skalarni produkt po definiciji 1.5.2, res zadošča pogojem definicije 1.5.3. Pogoja (Nii) in (Niii) je lahko preveriti in to prepuščamo bralcu za vajo. Za dokaz lastnosti (Ni) pa izrazimo norme s skalarnim produktom in kvadriramo na obeh straneh (s čimer dobimo ekvivalentno neenakost). Dokazati moramo torej, da je $\langle x + y, x + y\rangle \leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\|x\|\|y\|$. Ko v tej neenakosti razvijemo levo stran in upoštevamo še simetričnost skalarnega produkta, se neenakost poenostavi v $\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$. Ko nadomestimo x z $-x$, vidimo, da je treba dokazati naslednjo lemo:

LEMA 1.5.4. *Za vsaka vektorja x, y v prostoru $\mathcal{V}$ s skalarnim produktom velja neenakost Schwarza, Cauchyja in Bunjakovskega:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|. \tag{1.5.2}$$

Pri tem velja enakost le, ko sta vektorja x in y linearno odvisna.

DOKAZ. Predpostaviti smemo, da je $x \neq 0$ in $y \neq 0$, sicer se neenakost reducira na očitno enakost. Funkcija

$$f(t) = \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle t + \|y\|^2 t^2$$

je tedaj kvadratna funkcija realne spremenljivke t in zavzame le nenegativne vrednosti (ker kvadrat norme vektorja ne more biti negativen), zato ima kvečjemu eno realno ničlo. Torej mora biti njena diskriminanta manjša ali enaka 0, se pravi $4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$. Ko delimo s 4 in preuredimo, dobimo željeno neenakost.

Kadar sta dva vektorja linearno odvisna, je eden skalarni mnogokratnik drugega, recimo $y = \alpha x$. Ko vstavimo αx namesto y v obe strani neenakosti (1.5.2), vidimo, da velja tedaj enakost. Še obratno, če velja v (1.5.2) enakost (in je $x, y \neq 0$), je diskriminanta kvadratne funkcije f enaka 0, zato ima ta funkcija natanko eno realno ničlo α. Torej $0 = f(\alpha) = \|x + \alpha y\|^2$, kar je ekvivalentno z $x + \alpha y = 0$. $\square$

1.5.2. Ortonormirane množice

Po zgledu ravninskih vektorjev lahko sedaj tudi v splošnem vektorskem prostoru s skalarnim produktom definiramo *kot med neničelnima vektorjema*, x in y in sicer, da je to tisti kot $\phi \in [0, \pi]$, za katerega je

$$\cos\phi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Definicija je smiselna, ker je v tej formuli desna stran vedno med -1 in 1 po lemi 1.5.4.

DEFINICIJA 1.5.5. Vektorja x in y v prostoru s skalarnim produktom $\mathcal{V}$ imenujemo *ortogonalna* ali *pravokotna*, če je $\langle x, y\rangle = 0$. Podmnožica S v $\mathcal{V}$ je *ortogonalna*, če sta ortogonalna vsaka dva različna vektorja iz S. Če imajo poleg tega še vsi vektorji iz S normo 1, pravimo, da je S *ortonormirana* množica.

V skladu s to definicijo štejemo, da je vektor 0 ortogonalen na vse vektorje. Bralec naj pokaže, da je 0 edini vektor v $\mathcal{V}$, ki je ortogonalen na vse vektorje iz $\mathcal{V}$.

TRDITEV 1.5.6. *Vsaka ortogonalna množica neničelnih vektorjev (torej tudi vsaka ortonormirana množica) je linearno neodvisna.*

Dokaz. Naj bo $\{f_1, \dots, f_n\}$ ortogonalna množica neničelnih vektorjev. Recimo, da je

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = 0$$

za kake koeficiente $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Ko pomnožimo to enakost na obeh straneh skalarno z f_i (za fiksen i) in pri tem upoštevamo, da je $\langle f_j, f_i \rangle = 0$, če je $j \neq i$, dobimo

$$\alpha_i \|f_i\|^2 = 0.$$

Ker je $f_i \neq 0$, sledi od tod $\alpha_i = 0$. To dokazuje trditev za končne množice, za neskončne množice pa sledi potem iz definicije linearne neodvisnosti takih množic. $\square$

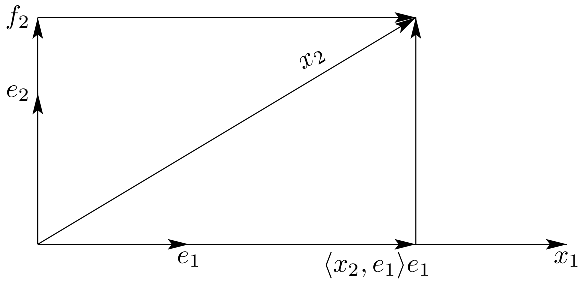
Trditev 1.5.7. *(Gram-Schmidtova ortonormalizacija) Naj bo*

$$S = \{x_1, x_2, \dots\}$$

zaporedje linearno neodvisnih vektorjev (lahko tudi končno) v prostoru $\mathcal{V}$ s skalarnim produktom. Obstaja tako ortonormirano zaporedje $\{e_1, e_2, \dots\}$ v $\mathcal{V}$, da je $[e_1, \dots, e_n] = [x_1, \dots, x_n]$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ (manjši ali enak moči množice S).

Dokaz. Vektor $e_1 := x_1/\|x_1\|$ ima normo 1 in očitno ima isto linearno ogrinjačo kot x_1, torej $[e_1] = [x_1]$.

V naslednjem koraku po zgledu običajnih ravninskih vektorjev pravokotno projicirajmo x_2 na enorazsežni podprostor, ki vsebuje e_1 (vsebuje tudi x_1).



Slika 1.1. Projekcija vektorja x_2 na e_1.

Ker ima e_1 dolžino 1, je ta projekcija kar $\langle x_2, e_1 \rangle e_1$. Kot v običajni ravnini je potem vektor $f_2 := x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1$ pravokoten na e_1, kar potrdi naslednji račun:

$$\langle f_2, e_1 \rangle = \langle x_2, e_1 \rangle - \langle x_2, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle = 0,$$

saj je $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$, ker ima e_1 normo 1. Ker f_2 ni 0 (sicer bi bilo $x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1 = 0$, torej bi bila x_2 in x_1 linearno odvisna), lahko definiramo $e_2 = f_2/\|f_2\|$. Sedaj je $\{e_1, e_2\}$ ortonormirana množica in $[e_1, e_2] = [x_1, x_2]$, saj sta vektorja e_1 in e_2 oba linearni kombinaciji vektorjev x_1 in x_2 ter obratno. (Preprost račun, ki to potrjuje, prepuščamo bralcu; da mora biti tako, pa kaže tudi geometrijska slika, kjer sta obe linearni ogrinjači ista ravnina.)

Dokaz nadaljujemo z indukcijo. Predpostavimo, da smo za kak n že našli tako ortonormirano množico $\{e_1, \ldots, e_n\}$, da je $[e_1, \ldots, e_k] = [x_1, \ldots, x_k]$ za vsak $k \leq n$. Vektor

$$f_{n+1} := x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_j \rangle e_j$$

je pravokoten na vse vektorje e_i za $i = 1, \ldots, n$, saj je

$$\langle f_{n+1}, e_i \rangle = \langle x_{n+1}, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle = \langle x_{n+1}, e_i \rangle - \langle x_{n+1}, e_i \rangle = 0,$$

ker je $\langle e_j, e_i \rangle = 0$, če je $j \neq i$, in $\langle e_j, e_i \rangle = 1$, če je $j = i$. Vektor f_{n+1} ni 0, sicer bi bil x_{n+1} linearna kombinacija vektorjev $e_1, \ldots, e_n$, torej $x_{n+1} \in [e_1, \ldots, e_n] = [x_1, \ldots, x_n]$, kar pa je nemogoče, ker so $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ linearno neodvisni. Zato lahko definiramo

$$e_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{\|f_{n+1}\|}.$$

Po konstrukciji so vektorji $e_1, \ldots, e_{n+1}$ linearne kombinacije vektorjev $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Ker so linearno neodvisni, morajo razpenjati isti podprostor, torej

$$[e_1, \ldots, e_{n+1}] = [x_1, \ldots, x_{n+1}].$$

□

Gram-Schmidtov postopek lahko izvedemo tudi na linearno odvisni množici, le da moramo izpustiti vse vektorje v zaporedju, ki so linearno odvisni od predhodnih vektorjev.

Definicija 1.5.8. Končno razsežen vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, opremljen s skalarnim produktom, imenujemo *evklidski prostor.*

Če izberemo poljubno bazo $\{x_1, \ldots, x_n\}$ evklidskega prostora in na njej uporabimo Gram-Schmidtov postopek, dobimo ortonormirano množico z isto linearno ogrinjačo, torej spet bazo.

Definicija 1.5.9. *Ortonormirana baza* je ortonormirana množica, ki je obenem baza evklidskega prostora.

Gram-Schmidtov postopek torej dokaže naslednjo trditev:

Trditev 1.5.10. *V vsakem evklidskem prostoru obstaja ortonormirana baza.*

Trditev 1.5.11. *Naj bo $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza evklidskega prostora $\mathcal{V}$. Vsak vektor $x \in \mathcal{V}$ lahko izrazimo kot*

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j. \tag{1.5.3}$$

Če označimo $x_j := \langle x, e_j\rangle$ in podobno za nadaljnji vektor $y \in \mathcal{V}$, $y_j := \langle y, e_j\rangle$, potem je

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j. \tag{1.5.4}$$

Kot poseben primer je torej

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2.$$

Dokaz. Ker je S baza, lahko izrazimo

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$$

za kake $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Ko pomnožimo zadnjo enakost skalarno na obeh straneh z izbranim vektorjem e_i in upoštevamo ortonormiranost množice S, dobimo

$$\alpha_i = \langle x, e_i\rangle = x_i.$$

Formula za skalarni produkt $\langle x, y\rangle$ sledi iz naslednjega računa, v katerem upoštevamo, da je $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, če je $i \neq j$, in $\langle e_j, e_j\rangle = 1$:

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

$\square$

Formula (1.5.4) za skalarni produkt pove, da se vsak skalarni produkt v evklidskem prostoru, ko izberemo ortonormirano bazo, izraža enako kot običajni skalarni produkt v $\mathbb{R}^n$. Koeficiente $\langle x, e_j\rangle$ v razvoju vektorja x po ortonormirani bazi imenujemo *Fourierovi koeficienti* vektorja x glede na izbrano ortonormirano bazo.

1.5.3. Skalarni produkt na kompleksnih vektorskih prostorih

Vse, kar smo zgoraj povedali za realne prostore s skalarnim produktom, je mogoče posplošiti na kompleksne prostore, le definicijo skalarnega produkta je treba nekoliko spremeniti.

Definicija 1.5.12. *Skalarni* (ali *hermitski*) *produkt* na kompleksnem vektorskem prostoru $\mathcal{V}$ je preslikava, ki vsakemu paru vektorjev $(x, y) \in \mathcal{V}^2$ priredi kompleksno število $\langle x, y\rangle$, pri čemer morajo biti izpolnjeni pogoji (i), (iii) in (iv) iz definicije 1.5.1 (za vse $x, y, z \in \mathcal{V}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$), namesto lastnosti (ii) pa mora veljati

(iic) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.

Pri zamenjavi vrstnega reda faktorjev se torej vrednost skalarnega produkta spremeni v konjugirano kompleksno število.

Posledično kompleksni skalarni produkt v drugem faktorju ni linearen, temveč *konjugirano linearen*:

$$\langle z, \alpha x + \beta y\rangle = \overline{\alpha}\langle z, x\rangle + \overline{\beta}\langle z, y\rangle \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ x, y, z \in \mathcal{V}).$$

ZGLED 1.5.13. Bralec naj sam pokaže, da je s predpisom

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j,$$

kjer je $x = (x_1, \dots, x_n)$ in $y = (y_1, \dots, y_n)$, definiran skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$.

Neenakost Schwarza, Cauchyja in Bunjakovskega velja tudi za kompleksen skalarni produkt, le njen dokaz (lema 1.5.4) je treba nekoliko dopolniti: za dana neničelna vektorja x in y opazujemo funkcijo kompleksne spremenljivke ζ,

$$\begin{aligned} f(\zeta) = \|x + \zeta y\|^2 &= \|x\|^2 + \zeta\overline{\langle x, y\rangle} + \overline{\zeta}\langle x, y\rangle + |\zeta|^2\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle\overline{\zeta}) + |\zeta|^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Za ζ lahko vstavimo $\zeta = t\alpha$, kjer je t poljubno realno število, α pa je tako kompleksno število z absolutno vrednostjo 1, da je $\langle x, y\rangle\overline{\alpha} = -|\langle x, y\rangle|$ (katero je to število?). Potem ostane f funkcija realne spremenljivke t,

$$f(t) = \|x\|^2 - 2|\langle x, y\rangle|t + \|y\|^2t^2.$$

Ker ima ta kvadratna funkcija le nenegativne vrednosti, sledi (kot v realnem primeru, z opazovanjem diskriminante), da je $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$.

DEFINICIJA 1.5.14. Končno razsežen kompleksen vektorski prostor s skalarnim produktom imenujemo *unitaren prostor*.

Nekoliko se spremeni tudi formula (1.5.4) za skalarni produkt v ortonormirani bazi $\{e_1, \dots, e_n\}$, ki se za unitaren prostor glasi:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j,$$

kjer je $x_j = \langle x, e_j\rangle$ in $y_j = \langle y, e_j\rangle$.

1.5.4. Ortogonalni komplement

DEFINICIJA 1.5.15. Za vsako podmnožico S v prostoru $\mathcal{V}$ s skalarnim produktom definirajmo njen *ortogonalni komplement* kot

$$S^\perp := \{x \in \mathcal{V} : \langle x, s\rangle = 0 \ \forall s \in S\}.$$

IZREK 1.5.16. *$S^\perp$ je vektorski podprostor v $\mathcal{V}$, $S^\perp = [S]^\perp$, in če je $\mathcal{V}$ končnorazsežen, lahko vsak vektor $x \in \mathcal{V}$ enolično razstavimo v obliki*

$$x = u + v, \quad \textit{kjer je } u \in [S],\ v \in S^\perp. \tag{1.5.5}$$

DEFINICIJA 1.5.17. Zaradi zapisa (1.5.5) pravimo, da je $\mathcal{V}$ *ortogonalna vsota* podprostorov $[S]$ in $S^\perp$ in pišemo

$$\mathcal{V} = [S] \oplus S^\perp.$$

Če je S vektorski podprostor, je $[S] = S$, zato sledi od tod

$$\mathcal{V} = S \oplus S^\perp.$$

Dokaz izreka. Če sta $x, y \in S^\perp$, je za vsak $s \in S$ in poljubna skalarja α, β

$$\langle \alpha x + \beta y, s\rangle = \alpha\langle x, s\rangle + \beta\langle y, s\rangle = 0,$$

torej je $S^\perp$ podprostor v $\mathcal{V}$.

Za poljubni dve podmnožici S in T v $\mathcal{V}$ očitno velja sklep

$$S \subseteq T \Longrightarrow T^\perp \subseteq S^\perp.$$

Poseben primer te relacije je $[S]^\perp \subseteq S^\perp$. Ker pa je vsak vektor y iz $[S]$ linearna kombinacija oblike $y = \sum_{j=1}^n \alpha_j s_j$, kjer so vsi s_j iz množice S, za vsak $x \in S^\perp$ velja

$$\langle y, x\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle s_j, x\rangle = 0.$$

To pomeni, da je $x \in [S]^\perp$ in $[S]^\perp = S^\perp$.

Izberimo sedaj ortonormirano bazo $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ za $[S]$ in jo dopolnimo do baze $N = \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1} \ldots, u_n\}$ za $\mathcal{V}$. Če na množici N izvedemo Gram-Schmidtov postopek, dobimo ortonormirano bazo za $\mathcal{V}$, prvih m vektorjev pa ostane enakih, ker so že ortonormirani. Da ne bodo potrebne nove oznake, smemo privzeti, da je že baza N ortonormirana. V tem primeru trdimo, da je $C := \{u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ ortonormirana baza za $S^\perp$. Vektorji u_i iz C so namreč pravokotni na vse vektorje baze B za $[S]$, torej so v $S^\perp$. Pa tudi vsak vektor $x \in S^\perp$ je linearna kombinacija vektorjev iz C. Za dokaz najprej razvijemo x po bazi N,

$$x = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j + \sum_{j=m+1}^n \alpha_j u_j. \tag{1.5.6}$$

Nato pa z upoštevanjem dejstva, da je x pravokoten na vse vektorje iz B in da je B ortonormirana množica, izračunamo, da je

$$\alpha_i = \langle x, u_i\rangle = 0 \quad \text{za } i = 1, \ldots, m.$$

Torej $x = \alpha_{m+1}u_{m+1} + \ldots + \alpha_n u_n$.

Če je sedaj x splošen vektor iz $\mathcal{V}$ in označimo z u in v zaporedoma vsoti na desni strani enakosti (1.5.6), je $u \in [S]$ in $v \in S^\perp$. S tem smo dokazali obstoj ortogonalne dekompozicije (1.5.5). Za dokaz enoličnosti privzemimo, da bi bilo tudi $x = y + z$, kjer je $y \in [S]$ in $z \in S^\perp$. Potem je $y + z = u + v$, se pravi $y - u = v - z$. Toda, ker sta $[S]$ in $S^\perp$ vektorska podprostora, je $y - u \in [S]$ in $v - z \in S^\perp$, zato mora biti $v - z$ pravokoten na vse vektorje iz $[S]$, torej tudi na vektor $y - u$ $(= v - z)$. Ker je 0 edini vektor, ki je pravokoten sam nase, sledi, da je $v - z = 0 = y - u$, zato $y = u$ in $z = v$. S tem smo dokazali tudi enoličnost dekompozicije (1.5.5). □

Za vsako podmnožico $S \subseteq \mathcal{V}$ naj bo $S^{\perp\perp} = (S^\perp)^\perp$. Iz definicij takoj sledi, da je

$$S \subseteq S^{\perp\perp}.$$

Če pa je S podprostor evklidskega ali unitarnega prostora, velja enakost.

Posledica 1.5.18. *Če je S podprostor evklidskega ali unitarnega prostora $\mathcal{V}$, je*

$$\dim S^\perp = \dim \mathcal{V} - \dim S \qquad \textit{in} \qquad S^{\perp\perp} = S.$$

DOKAZ. Iz dokaza prejšnjega izreka sledi, da je

$$\dim S^{\perp} = \dim \mathcal{V} - \dim S.$$

Ko uporabimo to enakost še za podprostor $S^{\perp}$ (namesto S), sledi

$$\dim S^{\perp\perp} = \dim \mathcal{V} - \dim S^{\perp} = \dim \mathcal{V} - (\dim \mathcal{V} - \dim S) = \dim S.$$

Ker je S podprostor v $S^{\perp\perp}$ z isto dimenzijo, sta enaka. □

Naloge

1. Naj bosta $a < b$ realni števili. Pokaži, da je s predpisom

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

definiran skalarni produkt na realnem vektorskem prostoru vseh zveznih funkcij iz intervala $[a, b]$ v $\mathbb{R}$.

2. Pokaži, da je s predpisom $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$ definiran skalarni produkt na kompleksnem vektorskem prostoru vseh zveznih funkcij iz intervala $[a, b]$ v $\mathbb{C}$.

3. Poišči z Gram-Schmidtovim postopkom ortonormirano bazo evklidskega prostora $\mathbb{R}_3[t]$ realnih polinomov stopnje do 3 s skalarnim produktom, definiranim s $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)\,dt$.

4. Pokaži, da v vektorskem prostoru s skalarnim produktom velja *paralelogramska identiteta*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Interpretiraj rezultat geometrijsko za vektorje v ravnini (od tod ime identitete).

5. Pokaži, da za vsako normo na vektorskem prostoru velja $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

6. Kdaj natančno za kompleksni skalarni produkt velja enakost v neenakosti Schwarza, Cauchyja in Bunjakovskega?

7. Pokaži, da se realni skalarni produkt da izraziti s pomočjo norme, ki jo porodi:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

8. Pokaži, da za hermitski produkt (na kompleksnem vektorskem prostoru $\mathcal{V}$) velja *polarizacijska identiteta*:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \|x + i^j y\|^2,$$

kjer je $i = \sqrt{-1}$.

9. Naj bo $\mathcal{U}$ vektorski podprostor unitarnega (ali evklidskega) prostora $\mathcal{V}$. Pokaži, da lahko vsako ortonormirano bazo za $\mathcal{U}$ dopolnimo do ortonormirane baze za $\mathcal{V}$.

* **10.** Dokaži: ortonormirana podmnožica S unitarnega prostora $\mathcal{V}$ je ortonormirana baza natanko tedaj, ko je S *maksimalna ortonormirana množica* (torej taka, da ni vsebovana v nobeni drugi ortonormirani podmnožici).

* **11.** Za vsak n je *Legendrov polinom* $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}[(t^2 - 1)^n]$. Pokaži, da je P_n polinom stopnje n, da so polinomi P_n ortogonalni za skalarni produkt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$ in izračunaj njihovo normo. (Namig: integracija per partes.)

Druga poglavja niso vključena v predogled.

Knjigo je možno kupiti v prodajalni DMFA – založništva na Jadranski 21, kjer imajo študenti 20% popust.

Literatura

[1] R. Bhatia, *Matrix analysis*, GTM **169**, Springer, Berlin, 1997.

[2] G. Birkhoff in S. MacLane, *A survey of modern algebra*, A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1997.

[3] J. C. Burkill in H. Burkill, *A second course in mathematical analysis*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[4] M. Dobovišek, D. Kobal in B. Magajna, *Naloge iz algebre I*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **20**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2005.

[5] H. D. Ebbinghaus et al., *Numbers*, GTM **123**, Springer - Verlag, Berlin, 1991.

[6] T. Frankel, *The geometry of physics*, Cambridge Univ. Press, 1997.

[7] L. C. Grove, *Algebra*, Academic Press, London, 1983.

[8] A. M. Gleason, *The definition of a quadratic form*, The American Mathematical Monthly, **73** (1966), 1049–1056.

[9] P. R. Halmos, *Finite-dimensional vector spaces*, UTM, Springer, Berlin, 1974.

[10] J. Hubbard in B. B. Hubbard, *Vector calculus, linear algebra, and differential forms: a unified approach*, Matrix editions, 2009.

[11] A. W. Knapp, *Basic real analysis*, Cornerstones, Birkhäuser, Boston, 2005.

[12] T. Košir in B. Magajna, *Transformacije v geometriji*, Matematika - fizika **38**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1997.

[13] E. Kramar, *Rešene naloge iz linearne algebre*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **24**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1994.

[14] F. Križanič, *Temelji realne matematične analize*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1990.

[15] F. Križanič, *Linearna algebra in linearna analiza*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1993.

[16] L. Sadun, *Applied linear algebra*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 2008.

[17] G. F. Simmons, *Introduction to topology and modern analysis*, McGraw-Hill, London, 1963.

[18] M. Spivak, *Calculus on manifolds*, W. A. Benjamin, New York, 1965.

[19] K. Tapp, *Matrix groups for undergraduates*, Student Math. Library **29**, AMS, Providence, RI, 2005.

[20] I. Vidav, *Algebra*, Matematika - fizika **4**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1989.

[21] I. Vidav, *Višja matematika I*, Matematika - fizika **6**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1994.

[22] J. Vrabec, *Metrični prostori*, Matematika - fizika **31**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1993.

Stvarno kazalo

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

Z

MATEMATIKA – FIZIKA
Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij

Izdajajo: Fakulteta za matematiko in fiziko
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
DMFA – založništvo

Založilo: DMFA – založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
http://www.dmfa-zaloznistvo.si

Odgovorna urednika Miran Černe in Andrej Likar

50.

Bojan Magajna

LINEARNA ALGEBRA, METRIČNI PROSTOR IN FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

1. natis

Strokovni pregled Peter Legiša in Boris Lavrič
Jezikovni pregled Janez Juvan
Računalniško stavil avtor
Korekture Tadeja Šekoranja
Tehnični urednik Matjaž Zaveršnik

Natisnila tiskarna Grafika 3000 v nakladi 200 izvodov

Ljubljana 2011

Cena: 19,99 EUR