Test iz Matematike 3, 25. 2. 2011 Priimek, ime, vp. št. :

1. a) Napiši definicijo množice z mero 0 v $\mathbb{R}^n$.

   Dokaži neposredno po tej definiciji, da ima za $a < b$ daljica $\{(1, y) | \quad a \leq y \leq b\}$ v ravnini (dvorazsežno) mero 0.

   b) Dokaži, da ima premica v ravnini dvorazsežno mero 0. (Vzemi, da je ta premica os x.)

   c) Naj bo $A \subset \mathbb{R}^2$ in $f : A \to \mathbb{C}$ funkcija.Naj bo $\iint_A |f| \, dS = 0$. Kaj lahko sklepaš o funkciji f?

2. Naj bo X prostor s skalarnim produktom, $x \in X$ in Z linearen podprostor v X.

   a) Napiši definicijo pravokotne projekcije $z = Px$ vektorja x na podprostor Z.

   b) Dokaži, da je z najboljša aproksimacija vektorja x z elementi podprostora Z.

   c) Naj bo $A\vec{x} = \vec{b}$ predoločen sistem linearnih enačb. Kaj je ustrezni normalni sistem in kakšen pomen ima?

   d) Napiši definicijo Hilbertovega prostora. Napiši definicijo ortonormirane baze takega prostora.

   e) Naj bo $\{g_n | n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza zaprtega podprostora Z. Kako dobimo pravokotno projekcijo Px vektorja x na podprostor Z?

3. Napiši kako ortonormirano bazo za:

   a) $\mathbb{C}^n$;

   b) $L^2 [-\pi, \pi]$;

   c) ravnino $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y\}$.

   d) Napiši kar se da veliko potrebnih in zadostnih pogojev za to, da je ONS $\{g_n | n \in \mathbb{N}\}$ ONB za Hilbertov prostor $\mathcal{H}$.

   e) Razvij odsekoma zvezno in odsekoma odvedljivo funkcijo $f : (0, 4) \to \mathbb{R}$ v trigonometrijsko Fourierovo vrsto kot liho funkcijo s periodo 8.

   Kaj je vsota te vrste v:

   f) 0;

g) 4;

h) točkah nezveznosti funkcije f?

4. a) Napiši eksistenčni izrek za diferencialno enačbo prvega reda z začetnim pogojem.

   b) Kateri integralski enačbi je enakovreden ta začetni problem? Napiši Picardove približke.

   c) Razloži Eulerjevo metodo za numerično reševanje takega začetnega problema.

5. Zapiši homogen sistem n linearnih diferencialnih enačb prvega reda na dolgo in v matrični obliki.

   a) Kaj je osnovna matrična rešitev takega sistema?

   Od zdaj naj ima sistem konstantne koeficiente.

   b) Kratko (s tremi črkami) zapiši kako tako osnovno matrično rešitev.

   c) Kratko (s štirimi črkami) zapiši poljubno rešitev sistema.

   d) Denimo, da lahko matriko sistema diagonaliziramo. Kako lahko v tem primeru zapišemo splošno rešitev?

   e) Kaj je korenski vektor reda 2 matrike sistema? Kako s takim vektorjem pridemo do rešitve sistema?

6. a) Zapiši Greenovo formulo.

   b) Dokaži jo za primer, da je območje pravokotnik v ravnini xy.

   c) Zapiši formulo, ki je v trirazsežnem prostoru posplošitev Greenove.

   Napiši formulo za ploskev in njeno površino, če je ploskev podana:

   d) eksplicitno;

   e) parametrično.