

IZPIT IZ TEORIJE - MATEMATIKA 3

10. 2. 2014

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1) (15 točk) Zapišite definiciji funkcij gama Γ in beta B , osnovno identiteto, ki ju povezuje, in izračunajte $B(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$.

2) (15 točk) Zapišite formulo za vpeljavo novih spremenljivk $x = \phi(u)$ v n -torni integral $\int_A f(x) dx$. V integral $\iint_A (x - y) dx dy$ po množici $A = \{(x, y); 0 \leq x - y \leq 2, 2 \leq x + 2y \leq 4\}$ vpeljite novi spremenljivki $u = x - y, v = x + 2y$ in ga izračunajte.

5)(nadaljevanje) (5 točk) Izračunajte vsoto $S = \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)$. Odgovor utemeljite!

6) (10 točk) Naj bo $\vec{y}' = A(x)\vec{y}$ linearen sistem navadnih diferencialnih enačb, kjer je $A(x)$ zvezna $n \times n$ matrika na intervalu I . Naj bo $x_0 \in I$. Dokažite, da so rešitve $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ te enačbe na I linearno odvisne kot preslikave natanko tedaj, ko so vektorji $\vec{y}_1(x_0), \dots, \vec{y}_m(x_0)$ linearno odvisni v \mathbf{R}^n .

4) (20 točk) Natančno formulirajte Gaussov izrek. Izračunajte integral vektorskega polja $\vec{F} = (y + z, x + y, y + x)$ po celotnem robu valja $V \subset \mathbf{R}^3$ z višino 2 ter polmerom osnovne ploskve 1, orientiranega tako, da normala na plašč valja kaže v smeri osi valja.

5) Naj bo X Hilbertov prostor s skalarnim produktom \langle, \rangle .

a) (5 točk) Kdaj družino vektorjev $\{e_m\}_m$ iz X imenujemo kompleten ortonormiran sistem?

b) (10 točk) Naj bo $f(x) = x^2 + x$ in naj bo $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ njena Fourierova vrsta na $[-\pi, \pi]$. Napišite vrednosti $F(x)$ za $x = \pi$ in $\frac{\pi}{2}$. Odgovor utemeljite z izrekom!

3) (20 točk) Naj bo $y' + b(x)y = c(x)$ linearna diferencialna enačba prvega reda, kjer sta b in c zvezni funkciji na I . Kakšna je struktura splošne rešitve te enačbe? Izpeljite in izračunajte splošno rešitev? Zapišite rešitve Cauchyjeve naloge za to enačbo z začetnim pogojem $y(\pi) = 0$, če veste, da sta $y_1 = x$ in $y_2 = \cos(x)$ rešitvi enačbe. (20 točk)