Test iz Matematike 3, 30. 6. 2011 Priimek, ime, vp. št. :

1. a) Napiši definicijo Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$.

   b) Napiši definicijo ortonormiranega sistema. Kaj pravi Besselova neenakost?

   c) Napiši definicijo ortonormirane baze prostora $\mathcal{H}$.

   Napiši kako ortonormirano bazo za:

   d) $\mathbb{C}^n$;

   e) $L^2[-\pi, \pi]$.

   f) Napiši kar se da veliko potrebnih in zadostnih pogojev za to, da je ONS $\{g_n | n \in \mathbb{N}\}$ ONB za Hilbertov prostor $\mathcal{H}$.

2. a) Razloži Eulerjevo metodo za numerično reševanje DE prvega reda z začetnim pogojem. Najprej napiši samo enačbo.

   b) Navedi še druge numerične metode in ocene za napako.

   c) Napiši eksistenčni izrek za sistem dveh linearnih DE prvega reda z začetnima pogojema. Najprej napiši tak sistem.

3. Zapiši homogen sistem n linearnih diferencialnih enačb prvega reda na dolgo in v matrični obliki.

   a) Kaj je osnovna matrična rešitev takega sistema?

   Od zdaj naj ima sistem konstantne koeficiente.

   b) Kratko (s tremi črkami) zapiši kako tako osnovno matrično rešitev.

   c) Kratko (s štirimi črkami) zapiši poljubno rešitev sistema.

   d) Denimo, da lahko matriko A sistema diagonaliziramo. Kako lahko v tem primeru zapišemo splošno rešitev?

   e) Kaj je korenski vektor reda 3 matrike sistema? Kako s takim vektorjem pridemo do rešitve sistema?

4. a) Opiši konstrukcijo parabolične Bézierove krivulje in de Casteljaujev algoritem.

   Parabolična Bézierova krivulja ima kontrolne točke $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$.

   b) Napiši de Casteljaujev algoritem.

   c) Napiši parametrično enačbo te krivulje.

d) Izračunaj točko na tej krivulji za $t = \frac{1}{2}$.

d) Dopolni jo do zlepka s parabolično Bézierovo krivuljo, ki se konča v $(4, 0)$ in ima v tej točki tangento s smernim koeficientom 1. Napiši enačbo te druge krivulje in skiciraj zlepek.

5. Napiši formulo za gladko ploskev, njeno normalo in njeno površino, če je ploskev podana:

   a) eksplicitno;

   b) parametrično.

   c) Kako implicitno podamo ploskev? Določi normalo na tako ploskev.

   d) Napiši Stokesov izrek.

   f) Napiši izrek Gaussa in Ostrogradskega.