1. kolokvij iz ANALIZE 2

fizika

20. november 2008

Vpisna številka: | | | | | | | | | Vrsta: ____________

Ime in priimek: ______________________________ Stolpec: ____________

1. [25] Ugotovi, ali obstaja integral

$$\int_0^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{\min\{2,2\sqrt{x}\}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x+y^2}}.$$

Če obstaja, ga izračunaj.

2. [25] Naj bo n naravno število ($n \geqslant 1$). Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^{2n})}{x^{n+1}(1+x^{2n})}\,\mathrm{d}x \tag{$\star$}$$

tako da odvajaš integral s parametrom

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\log(1+ax^{2n})}{x^{n+1}(1+x^{2n})}\,\mathrm{d}x, \quad a \in [0,\infty). \tag{$\star\star$}$$

Navodilo:

- Utemelji konvergenco integrala ($\star$) in enakomerno konvergenco (formalnega) odvoda $F'(a)$.
- Izračunaj $F'(a)$ za $a \neq 1$. Uporabi naslednji nastavek za razcep na parcialne ulomke
$$\frac{1}{(1+u^2)(b^2+u^2)} = \frac{A}{1+u^2} + \frac{B}{b^2+u^2}, \quad \text{če } b \neq 1.$$

3. [25] Naj bo $a > 0$. S pomočjo funkcije Γ določi volumen telesa, omejenega s ploskvama $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 = y^2 + z^2$, pri čemer je $x \geqslant 0$.

4. [25] Imejmo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & -2 \\ b & c & 5 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$.

- Določi števila a, b, c, da bo predpis $(x, y)_A := \langle Ax, y \rangle$ določal skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$.
- Dopolni vektor $(3, 2, 1)$ do ortogonalne baze (glede na $(\cdot, \cdot)_A$) prostora $\mathbb{R}^3$.
- Izrazi vektor $(1, 2, 1)$ v tej bazi.