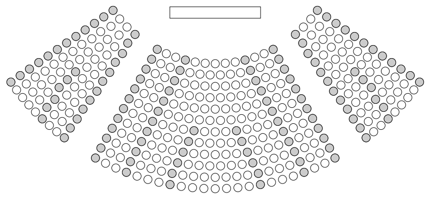

Sedež (VFP)

1	
2	
3	
4	
Σ	

Matematika 3: 2. kolokvij

10. 1. 2014

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Poišči splošno rešitev spodnjega sistema diferencialnih enačb.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y - 4z \\ \dot{y} &= x - y + 4z \\ \dot{z} &= x - 2y + 5z \end{aligned} \quad .$$

Določi še kako od baz prostora rešitev zgornjega sistema.

Sistem prepišemo v

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

z A pa označimo zgornjo matriko. Karakteristični polinom matrike A je enak $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Torej, lastne vrednosti matrike A so $\lambda_{1,2} = 1$ in $\lambda_3 = 2$. Baza $\ker(A - I)$ je enaka $\{[2, 1, 0]^T, [-4, 0, 1]^T\}$. Bazo $\ker(A - 2I)$ tvori vektor $[-1, 1, 1]^T$. Splošna rešitev sistema iz naloge je enaka

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2e^t \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -4e^t \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Iz zgornje vrstice hitro razberemo tudi, kakšna je baza prostora rešitev zgornjega sistema.

2. naloga (25 točk)

Podana je diferencialna enačba

$$x^2y'' + 7xy' + 9y = (1 + 25\ln^2 x)x^2.$$

a) Poišči splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

b) Med vsemi rešitvami iz a) poišči tisto, ki zadošča $y(1) = 0$ in $y'(1) = 0$.

a) Enačba je nehomogena Cauchy-Eulerjeva. Poiščimo najprej rešitev enačbe $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0$. Z nastavkom $y = x^\lambda$ dobimo $\lambda(\lambda - 1) + 7\lambda + 0 = 0$ oziroma $(\lambda + 3)^2 = 0$. Torej je $\lambda = -3$ dvojna ničla. Splošna rešitev homogenega dela Cauchy-Eulerjeve enačbe je enaka

$$y_h = Ax^{-3} + Bx^{-3}\ln x.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $y_p = x^2(C+D\ln x+E\ln^2 x)$. Z odvajanjem dobimo

$$y_p' = x((2C + D) + (2D + 2E)\ln x + 2E\ln^2 x)$$

in

$$y_p'' = (2C + 3D + 2E) + (2D + 6E)\ln x + 2E\ln^2 x.$$

Vstavimo v enačbo in dobimo sistem enačb

$$\begin{array}{rcrcl} x^2\ln x & : & 25E & = & 25 \\ x\ln x & : & 25D + 20E & = & 0 \\ \ln x & : & 25C + 10D + 2E & = & 1 \end{array}$$

z rešitvijo $(C, D, E) = (7/25, -4/5, 1)$. Torej je splošna rešitev Cauchy-Eulerjeve enačbe enaka

$$y = Ax^{-3} + Bx^{-3}\ln x + x^2\left(\frac{7}{25} - \frac{4}{5}\ln x + \ln^2 x\right).$$

b) Iz $y(1) = 0$ dobimo $A = -\frac{7}{25}$, iz $y'(1) = 0$ pa dobimo $B = -\frac{3}{5}$. Iskana rešitev je enaka

$$y = -\frac{7}{25}x^{-3} - \frac{3}{5}x^{-3}\ln x + x^2\left(\frac{7}{25} - \frac{4}{5}\ln x + \ln^2 x\right).$$

3. naloga (25 točk)

Podana je krivulja

$$\mathcal{K}: \quad \vec{r}(t) = (\sqrt{2}t, \ln(\cos t), \ln(\sin t)), \qquad t \in [\pi/6, \pi/3].$$

a) Določi naravno parametrizacijo zgornje krivulje.

b) Izračunaj torzijsko in fleksijsko ukrivljenost krivulje v točki $(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\ln 2, -\frac{1}{2}\ln 2)$.

Izračunajmo

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\sqrt{2}, -\frac{\sin t}{\cos t}, \frac{\cos t}{\sin t}\right).$$

a) Z uvedbo nove spremenljivke $x = \mathrm{tg} t$ dobimo

$$s = \int_{\frac{\pi}{6}}^{t_0} \sqrt{2 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{t_0} \sqrt{\frac{\sin^4 t + 2\sin^2 t\cos^2 t + \cos^4 t}{\cos^2 t \sin^2 t}} dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{t_0} \frac{dt}{\sin t \cos t} = \ln\left(\sqrt{3}\mathrm{tg}(t_0)\right).$$

Odtod sledi

$$t_0 = \mathrm{arctg}\left(\frac{e^s}{\sqrt{3}}\right).$$

Dolžina krivulje je enaka

$$\ln(\mathrm{tg} t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln 3.$$

Torej je naravna parametrizacija naslednja:

$$\vec{r}(s) = \left(\sqrt{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{e^s}{\sqrt{3}}\right), \ln(\cos(\mathrm{arctg}\left(\frac{e^s}{\sqrt{3}}\right))), \ln(\sin(\mathrm{arctg}\left(\frac{e^s}{\sqrt{3}}\right)))\right), \qquad s \in [0, \ln 3].$$

b) Glede na prvotno parametrizacijo točki iz naloge pripada parameter $t = \frac{\pi}{4}$. Izračunajmo še

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \left(0, -\frac{1}{\cos^2 t}, -\frac{1}{\sin^2 t}\right)$$

in

$$\dddot{\vec{r}}(t) = \left(0, \frac{-2\sin t}{\cos^3 t}, \frac{2\cos t}{\sin^3 t}\right).$$

Torej

$$\dot{\vec{r}}(\pi/4) = (\sqrt{2}, -1, 1), \qquad \ddot{\vec{r}}(\pi/4) = (0, -2, -2), \qquad \dddot{\vec{r}}(\pi/4) = (0, -4, 4),$$

$$\dot{\vec{r}}(\pi/4) \times \ddot{\vec{r}}(\pi/4) = (4, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), \qquad [\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}](\pi/4) = -16\sqrt{2}.$$

Odtod sledi

$$\kappa = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{in} \qquad \omega = \frac{-16\sqrt{2}}{32} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. naloga (25 točk)

Podano je vektorsko polje $\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, zx)$. Izračunaj ploskovni integral vektorskega polja $\vec{F}$ po zunanjemu delu sfere

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, x^2+y^2+z^2 = 1\},$$

ki leži v 1. oktantu.

1. možnost: Če želimo uporabiti Gaussov izrek, moramo najprej območje zapreti in na koncu odšteti ustrezne ploskovne integrale po treh ploskvah, katere smo dodali pri zapiranju. Zaprto območje je del enotske krogle v prvem kvadrantu. Označimo ga s T. Takoj izračunamo $\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = x+y+z$. Torej je

$$\int\int\int_T \mathrm{div}\vec{F} dxdydz = \int\int\int_T (x+y+z)dxdydz.$$

Uvedimo sferične koordinate

$$\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi\cos\theta \\ y &=& r\sin\varphi\cos\theta \\ z &=& r\sin\theta \end{array}.$$

Jacobijeva determinanta je v tem primeru enaka $r^2\cos\theta$. Torej je

$$\int\int\int_T (x+y+z)dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^2\cos\theta(r\cos\varphi\cos\theta + r\sin\varphi\cos\theta + r\sin\theta)dr$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos\varphi+\sin\varphi)\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta)d\varphi = \frac{1}{4}(2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{16}.$$

Izračunajmo še ploskovne integrale po ploskvah, katere moramo odšteti. Ploskev P_1, ki leži v xy-ravnini ima za normalo vektor, ki kaže v smeri $(0,0,-1)$, na tej ploskvi pa vektorsko polje F_1 izgleda $(*,*,0)$, saj je $z=0$. Torej je

$$\int\int_{P_1} \vec{F}d\vec{S} = \int\int_{P_1} (*,*,0)\cdot(0,0,-1)dS = 0.$$

Podobno sta preostala ploskovna integrala enaka 0. Iskani rezultat je torej $\frac{3\pi}{16}$.

2. možnost: Ploskovni integral lahko izračunamo tudi direktno. Najprej parametrizirajmo sfero

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta).$$

Izračunajmo še

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_\varphi &=& (-\sin\varphi\cos\theta, \cos\varphi\cos\theta, 0) \\ \vec{r}_\theta &=& (-\cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin\theta, \cos\theta) \\ \vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta &=& (\cos^2\theta\cos\varphi, \cos^2\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\theta) \end{array}.$$

Izberemo zunanjo normalo. Odtod sledi

$$\int_P \vec{F}d\vec{S} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}\cdot(\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta)d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\theta\cos^2\varphi\sin\varphi + \cos^3\theta\sin^2\varphi\sin\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta\cos\varphi)d\varphi = \frac{3\pi}{16},$$

kjer smo si pomagali z zvezama

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}x\sin^{2q-1}xdx = \frac{1}{2}B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}, \qquad p,q>0$$

in $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.