

## 1. DOMAČA NALOGA

### Integrali s parametri, n-terni Riemannov integral

Obvezne so vse naloge, razen nalog označenih z \*.  
Rok oddaje nalog: **30. 10. 13**

1. (5) Izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{5}{4}} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

2. (5) Izračunajte integral

$$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{x-x^2}} dx.$$

3. (5) Upoštevajoč, da za vsak  $p \in (0, 1)$  velja  $B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$  izračunajte integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)} dx.$$

4. (10) Za  $a \geq 0$  definiramo

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x} dx.$$

Koliko je  $F(2013)$ ?

5. (10) Naj bo

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \min\{\frac{\sqrt{3}}{\sin x}, \frac{1}{\cos x}\}\}.$$

Izračunajte integral

$$\int \int_A y dx dy.$$

6. (15) Naj bo  $L$  plošča v ravnini, omejena s krivuljami  $2x - y = 0$ ,  $2x - y = 3$ ,  $x + y = 0$  in  $x + y = 1$ . Izračunaj maso plošče, če je njena ploščinska gostota enaka  $\rho(x, y) = x$ .

7. Homogeno telo  $T$  v zgornjem polprostoru je omejeno s ploskvama  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  in  $z = 1$ .
- (10) Določite prostornino telesa  $T$ .
  - (10) Določite koordinate težišča telesa  $T$ .
  - (10) Določite vztrajnostni moment telesa  $T$  okoli osi  $z$ .
8. Dano je homogeno telo  $S$  mase  $M$ , določeno z neenakostmi  $x^2 + y^2 \leq R^2$  in  $0 \leq z \leq R$ , in točkasto telo  $T$  mase  $m$ , ki se nahaja v točki  $(0, 0, h)$ , kjer je  $h > R$ .
- (10) Določite gravitacijsko silo  $\vec{F}(R)$ , s katero  $S$  privlači  $T$ .
  - (10) Izračunajte limito

$$\lim_{R \downarrow 0} \vec{F}(R).$$

9. \* (10) Naj bo

$$f(t) = \int_0^\infty x^t e^{-\sqrt{x}} dx.$$

Določite vse vrednosti  $t$ , za katere integral obstaja in za katere velja  $f(t + \frac{1}{2}) = 6f(t)$ .

10. \* (10) Pokažite, da ima množica

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; |x| + |y| = q, q \in \mathbf{Q}\}$$

mero 0.