

2. DOMAČA NALOGA

Navadne diferencialne enačbe

Obvezne so vse naloge, razen nalog označenih z *.
Rok oddaje nalog: **25. 11. 13**

1. (5) Naj bosta $y_1(x) = e^x$ in $y_2(x) = x^2 + 1 + e^x$ rešitvi diferencialne enačbe

$$y' + b(x)y = c(x).$$

Poiščite splošno rešitev te diferencialne enačbe.

2. (5) Poiščite padajočo funkcijo $y(x)$, definirano v okolici 0, ki reši diferencialno enačbo

$$(y')^2(1+x)^2 = 1 + y^2,$$

in katere graf gre skozi točko $(0, 0)$.

3. (10) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe

$$x^2y' + xy - y^2 = x^2.$$

4. (10) Rešite

$$y' = \frac{(1 + e^x - e^{-x})y^2 - (e^x + xe^x + e^{-x} - xe^{-x})y + 1}{3y^2 - 2(x + e^x + e^{-x})y + (xe^x + xe^{-x} + 1)}.$$

5. (10) Poščite rešitev diferencialne enačbe

$$y''' = \frac{1 + (y'')^2}{1 + (y')^2}y',$$

za katero velja $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 1$.

6. (15) Poiščite vse tiste grafe funkcij v prvem kvadrantu, ki imajo lastnost, da vsaka tangenta na graf 'odreže' iz prvega kvadranta trikotnik s konstantno ploščino P (predpostavite lahko, da je $y' < 0$).
7. (15) V prvi posodi je 10l vode, v kateri je raztopljeno 10g soli, v drugi posodi pa je 5l vode, v kateri je tudi raztopljeno 10g soli. Obe posodi imata mešalec. V prvo posodo začne ob času

$t = 0$ pritekati solna raztopina s koncentracijo 2 g/l. Vsako sekundo priteče 1 dl raztopine. Istočasno iz prve posode izteka 1dl/s raztopine v drugo posodo ter nato iz druge posode nova raztopina s hitrostjo 1dl/s v kanalizacijo. Kolikšna je količina soli v drugi posodi po eni minuti?

8. Telo z maso m prosto pada. Glede na obliko telesa sta najbolj standardni dve predpostavki glede sile zračnega upora:

a) (15) zračni upor je sorazmeren s hitrostjo telesa - sorazmernostni faktor γ

b) (15) zračni upor je sorazmeren s kvadratom hitrosti telesa - sorazmernostni faktor α .

Za oba primera nastavite ustrezno diferencialno enačbo za hitrost $v(t)$ telesa v odvisnosti od časa in jima poiščite splošni rešitvi. Za rešitvi, ki zadoščata začetnemu pogoju $v(0) = 0$, izračunajte limiti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(t)}{t}$$

9. * Naj bo $y(t)$ rešitev diferencialne enačbe

$$y' = 1 - y^{2013},$$

katere graf poteka skozi točko $(0, 0)$.

a) (10) Pokažite, da je ta rešitev definirana za vse $t \geq 0$.

b) (10) Izračunajte limito $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$. Odgovor utemeljite!