3. DOMAČA NALOGA
Sistemi navadnih diferencialnih enačb, krivulje, ploskve in vektorska analiza

Obvezne so vse naloge, razen nalog označenih z *.
Rok oddaje nalog: **6. 1. 14**

1. (15) Poiščite tisto rešitev sistema

$$\dot{x} = -2x + y + 5\sin(t), \quad \dot{y} = x - 2y + 3,$$

za katero velja $x(0) = 1$ in $y(0) = 1$.

2. (15) Na strop sta na dveh tankih nitkah dolžine l obešeni točkasti telesi z maso m. Telesi sta povezani s prožno vzmetjo s koeficientom k. Odmika nihal od mirovnih leg sta majhna. Odmike merimo s kotoma odmikov nihal od mirovne lege: φ_1, φ_2. Zapišite sistem ustreznih diferencialnih enačb in poiščite njegovo splošno rešitev.

3. (15) Naj bo Γ krivulja, ki jo dobimo kot presek ploskev $z = xy$ ter $x^2 + y^2 = 4$. V točki $(\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$ določite vektorje $\vec{T}$, $\vec{N}$ in $\vec{B}$ ter fleksijsko ukrivljenost.

4. (15) Naj bo Γ lok homogene verižnice $z = a\cosh(\frac{x}{a})$, $y = 0$, $x \in [-a, a]$, $a > 0$. Izračunajte njeno težišče ter njen vztrajnostni moment okoli osi z.

5. (10) Naj bo Σ homogena ploskev, ki je podana kot graf funkcije $f(x, y) = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$ nad krogom $K((0, 0), a)$, $a > 0$. Izračunajte njeno težišče.

6. (10) Naj bo $\vec{F}(x, y, z) = (-x + y^2 + z^3, xe^y, -xze^y + z + 1)$. Naj bo Σ ploskev definirana s parametrizacijo $\vec{r}(u, v) = ((1 - u^2 - v^2)(u^2 + v^2)(\sinh^3(u) + v) + u, v + (1 - u^2 - v^2)\sinh(u), -u^2 - v^2 + 1)$, kjer (u, v) teče po krogu s središčem $(0, 0)$ in polmerom 1. Izračunajte pretok polja $\vec{F}$ skozi Σ. Orientacija ploskve Σ je usklajena s parametrizacijo.

7. (10) Naj bo $\vec{F}(x, y, z) = (e^y + z^2\cos(x), xe^y, 2z\sin(x))$ vektorsko polje in naj bo Γ gladka krivulja v prostoru, podana s

parametrizacijo:

$$\vec{r}(t) = (\sin(3t), (5 + \sin(10t)) \cos(t), (5 + \sin(10t)) \sin(t))$$

kjer t teče od 0 do 2π. Izračunajte delo $\vec{F}$ vzdolž Γ.

8. (10) Določite vse radialno simetrične harmonične funkcije v ravnini in prostoru. Funkcija je radialno simetrična, če je odvisna le od oddaljenosti r od izhodišča.

9. * (20) Poiščite tisto rešitev sistema

$$x''' = 2x + y \quad y''' = x + 2y$$

za katero velja $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$ in $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.