Domača naloga za poglavje: *Fourierove vrste*

Obvezne so vse naloge razen nalog in točk z *. Rok oddaje: 23.11.

1. Naj bo f periodična s periodo 14 in $f(x) = 0$ za $-7 < x < 0$, $f(x) = 1$ za $0 < x < 7$.

   a) Razvij f v Fourierovo vrsto, tako da uporabiš razvoj stopnice s predavanj.

   b) Naj bo g periodična s periodo 14 in $g(x) = -3$ za $-7 < x < 0$, $g(x) = 5$ za $0 < x < 7$. Z uporabo točke (a) razvij g v Fourierovo vrsto.

2. Naj bo $f(x) = \cos 2x$ za $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

   a) Razvij f po samih sinusih.

   b) Določi vsoto $F(x)$ Fourierove vrste v $x = 0$ in $x = \frac{\pi}{4}$ in skiciraj graf za F. Koliko je perioda?

3. V $L_2\,[-1,1]$ imamo funkciji $p(x) = x + 1$ in $q(x) = x^3$.

   a) Določi $< p, q >, \qquad ||p||_2, \qquad ||q||_2$.

   b) Najdi vse polinome stopnje največ 1, ki so v $L_2\,[-1,1]$ pravokotni na p.

   c) Določi ONS $\{u, v\}$ v $L_2\,[-1,1]$, tako da sta u in p linearno odvisna in da je v polinom stopnje največ 1.

   d) Določi pravokotno projekcijo polinoma q na podprostor $lin\,\{p\}$.

   *e) Določi pravokotno projekcijo polinoma q na podprostor polinomov stopnje največ 1.

4. a) Ali je funkcija $f(x) = x^{-1}$ v $L_2\,[3,\infty]$?

   b) Ali je ta funkcija v $L_1\,[3,\infty]$?

5. *Naj bo $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ in $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$. Naj bo $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotni projektor na $lin\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$.

   a) Dopolni množico $\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$ do ONB $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ za $\mathbb{R}^3$.

   b) Zapiši matriko za P v bazi $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$.

   c) Določi lastne vrednosti in lastne vektorje za P.

   d) Zapiši matriko za P v bazi $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

6. *V $L_2\,[-1,1]$ imamo polinoma $p(x) = x$ in $q(x) = x^5$.

   a) Določi najboljšo aproksimacijo za q s funkcijami, ki imajo obliko tp, kjer je $t \in \mathbb{R}$.

   *b) Določi še $min\,\{||q - tp||_2; t \in \mathbb{R}\}$.

   *c) Izvedi Gram-Schmidtov postopek na množici $\{p, q\}$.

7. *Naj bo

$$e_n(x) = \exp(\frac{in\pi x}{c}) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

   V prostoru $L^2(-c, c)$ določi:

   a) $< e_n, e_m >$;

   b) $||e_n||_2$.

   c) Od tod zapiši ONB v tem prostoru.

   *d) Izpelji Parsevalovo formulo za razvoj po tej ONB.