

Domača naloga za poglavje:  
Sistemi DE

Obvezne so vse naloge razen nalog in točk z \*. Zapiši vse vmesne račune in utemeljitve. Odgovore dvakrat podčrtaj. Rok oddaje: 23. 12. 2011.

1. Naj bo  $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  in

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Izračunaj  $N^2$ ,  $P^2$ ,  $NP$ ,  $PN$ . Ali  $N, P$  komutirata?

Izračunaj:

b)  $e^{tN}$ ;

c)  $e^{tP}$  in  $e^{2\pi i P}$ ;

d)  $e^{tN} e^{tP}$ ;

e)  $e^{tP} e^{tN}$ .

Naj bo  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

f) Izrazi  $A$  z  $N$  in izračunaj  $e^{tA}$ .

2. \* Naj bo  $R = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Izračunaj  $R^2$ ,  $R^3$  in  $R^n$ .

b) Izračunaj  $e^{tR}$  in  $e^{itR}$ .

Če je  $G = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ ,

c) izrazi  $G$  z  $R$  in izračunaj  $e^{tG}$  in  $e^{itG}$ .

3. Naj bo  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

a) Določi vse lastne vrednosti in lastne vektorje za  $A$ . (Delo si olajšaj, če najprej določiš lastne vrednosti in lastne vektorje za  $B = A - 2I$ .)

b) Določi kak korenski vektor  $\vec{w}$  reda 2 za  $A$ . Izračunaj še  $e^{tA}\vec{w}$ .

\*c) Določi vse korenske vektorje reda 2 za  $A$ .

d) Določi kak korenski vektor  $\vec{u}$  reda 3 za  $A$ . Izračunaj še  $e^{tA}\vec{u}$ .

\*e) Določi vse korenske vektorje reda 3 za  $A$ .

d) Napiši splošno rešitev sistema

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

in ustrezno splošno matrično rešitev.

\*e) Izračunaj  $e^{tB}$  in  $e^{tA}$ .

4. Sistem

$$\dot{x} = -x - \frac{2}{3}y,$$

$$\dot{y} = \frac{4}{3}x + y$$

ima splošno rešitev  $x = C_1 \exp(\frac{t}{3}) + C_2 \exp(\frac{-t}{3})$ ,  $y = -2C_1 \exp(\frac{t}{3}) - C_2 \exp(\frac{-t}{3})$ .

a) Zapiši ustrezno splošno matrično rešitev  $X(t)$  in preveri, da je  $\dot{X}(t) = AX(t)$ , kjer je  $A$  matrika sistema.

b) Z variacijo konstante reši nehomogeni sistem

$$\dot{x} = -x - \frac{2}{3}y + e^t,$$

$$\dot{y} = \frac{4}{3}x + y - t.$$