

MATEMATIKA 4
KOLOKVIJ 1
8.4.2011

❶ Dano je vektorsko polje

$$\vec{v}(x, y, z) = (xf(y), f(y), z).$$

1. Določi funkcijo f tako, da bo polje $\vec{v} = \text{rot } \vec{F}$ za neko vektorsko polje \vec{F} .

Namig: Koliko je $\text{div}(\text{rot } \vec{F})$?

2. Izračunaj integral

$$\int_K \vec{F} d\vec{s}$$

kjer je krivulja K podana s $K = \{(\cos t, \sin t, 1) | t \in [0, 2\pi]\}$ in orientirana v smeri naraščujočega parametra.

❷ Reši diferencialno enačbo $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ za funkcijo $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je

$$u(0, t) = 0 \quad u(\pi, t) = 0 \quad u(x, 0) = \cos x$$

(Pomoč: $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$)

❸ Določi ekstremne točke funkcionala

$$F(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx$$

pri pogojih $y(0) = y(1)$.

Namig: določi še dinamični robni pogoj.

❹ Naj bo

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

1. Izračunaj Fourierovo transformiranko funkcije f .

2. Katera funkcija je $f \cdot \bar{f}$?

3. Izračunaj integrala $\int_0^\infty \frac{(\cos x - 1)^2}{x^2} dx$ in $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$.