Matematika 4: 1.Kolokvij, 11. 4. 2014

Možno je doseči 100 točk. Veliko sreče!

1	2	3	4	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

S Fourierovo transformacijo reši diferencialno enačbo $y' - y = H(x)e^{-x}$, kjer je $H(x) = 0$ za $x \leq 0$ in $H(x) = 1$ za $x > 0$.
Z F označimo fourierovo transfromiranko funkcije y. Ko transformiramo zgornjo enačbo in iz nje izpostavimo F dobimo $F = 1/(4 + t^2)$. Rešitev zgornje enačbe bo enaka inverzni fourierovi transformaciji te funkcije F, t.j $y = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{2\pi ixt}dt = \frac{e^{2\pi ixt}}{4+t^2}dt$. Take vrste integrale rešujemo s pomočjo kompleksne analize.
Izračunajmo kompleksen integral po robu območa $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \Im(z) > 0\}$.
$2\pi i Res(\frac{e^{2\pi izx}}{4+z^2}, 2i) = \int_{\partial D_R} \frac{e^{2\pi izx}}{4+z^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi ixt}}{4+t^2}dt + \int_0^{\pi} \frac{Rie^{i\varphi}e^{2\pi itRe^{i\varphi}}}{4+R^2e^{2i\varphi}}d\varphi$
$|\frac{Rie^{i\varphi}e^{2\pi itRe^{i\varphi}}}{4+R^2e^{2i\varphi}}| = \frac{|e^{-2\pi Rt\sin\varphi}|}{|e^{-2i\varphi}\frac{4}{R}+R|}$
Limita tega integrala je dobro definirana za $x > 0$. Ko pošljemo $R \to \infty$ gre zadnji integral proti 0 drugi integral pa je naš željeni torej $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-4\pi x}$ za $x > 0$.
Za $x < 0$ ponovimo postopek na območju $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \Im(z) < 0\}$ in upoštevamo $2\pi i Res(\frac{e^{2\pi izx}}{4+z^2}, -2i) = \int_{\partial D_R} \frac{e^{2\pi izx}}{4+z^2}dz$. Ko zadevo poračunamo dobimo $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{4\pi x}$ za $x < 0$.
Torej rešitev začetne enačbe je $y = \frac{\pi}{2}e^{-4\pi|x|}$

Naloga 2 [25 točk]

Poišči funkcijo $y(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$, katere graf ima dolžino $\pi/2$ in je ekstrem funkcionala

$$F(y) = \int_0^1 xy' dx + y(1)^2,$$

pri pogoju $y(1) = 0$. Pogoj $y(1) = 0$ nam da $F(y) = \int_0^1 xy' dx$, ki pa je enostavno izračunljiv. Rezultat je $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Naloga 3 [25 točk]

Z $\vec{s}(t) = (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t))$ označimo pot delca z maso $m = 1$, ki se s hitrostjo $v(t)$ giblje po ravnini pod vplivom potenciala $U(t) = -\frac{m}{8||\vec{s}(t)||^2}$. Poišči pot, ki je ekstremala za

$$\mathcal{S} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}mv(t)^2 - U(t)\right) dt,$$

pri pogojih $r(1) = \frac{1}{2}$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) = \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. (Namig: Uporabi $||\frac{d\vec{s}}{dt}|| = \sqrt{r'^2(t) + r^2\varphi'^2(t)}$)

$L = 1/2r'^2 + r^2\varphi'^2 + 1/(8r^2)$
$L_r - d/dtL_{r'} = 0$, $L_\varphi - d/dtL_{\varphi'} = 0$. Ker t ne nastopa v enačbi lahko eno od enačb nadomestimo z $L - r'L_{r'} - \varphi' L_{\varphi'} = C$, kar je enako kot $\frac{1}{2}mv(t)^2 + U(t) =$konst. (ohranitev energije).
Torej dobimo $-1/2(r'^2 + r^2\varphi'^2) + 1/(8r^2) = C$. Iz enačbe $L_\varphi - d/dtL_{\varphi'} = 0$ dobimo $r^2\varphi' = D$ oz. $\varphi' = D/r^2$. Sedaj enačbi združimo in malce preuredimo enačbo ter dobimo $2rr'/\sqrt{1 - 4D^2 - Cr^2} = 1$. Integriramo in ko izpostavimo r dobimo

$$r = \sqrt{(1 - 4D^2)/(8C) - 2C(t + E)^2}.$$

Z upoštevanjem prostega robnega pogoja pri $t = 0$ dobimo $L_{r'}(0) = r'(0) = 0$ oz. $E = 0$ ($C \neq 0$ preveri)
Sedaj poračunajmo še φ iz formule $\varphi' = D/r^2 = D/(((1 - 4D^2)/8C) - 2Ct^2)$. Z razcepom ulomka na dva dela (t.j. $A/(a - b) + B/(a - b)$) dobimo

$$\varphi + F = D/\sqrt{1 - 4D^2}\log((\sqrt{1 - 4D^2} + 4Ct)/(\sqrt{1 - 4D^2} - 4Ct)).$$

Začetni pogoj $\varphi(0) = 0$ nam da $F = 0$. Iz ostalih pogojev pa dobimo še $D = 1/\sqrt{8}$ in $C = 1/8$.

Naloga 4 [25 točk]

Izračunaj

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{(\sin\varphi - 2)^2} d\varphi.$$

(Namig: Uvedi novo spremenljivko $z = e^{i\varphi}$.)
Uvedemo novo spremenljivko $z = e^{i\varphi}$ in $dz/iz = d\varphi$. Uporabimo $\sin\varphi = (z - \bar{z})/2i$ ter $\bar{z} = 1/z$ na krožnici. S preureditvijo enačbe dosežemo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{(\sin\varphi - 2)^2} d\varphi = \int_{S^1} 4(z-1)/(z^2 - 4iz - 1)^2.$$

Poiščemo ničle polinoma $z^2 - 4iz - 1$ to sta $i(2 \pm \sqrt{3})$. Torej je zgornji integral enak $2\pi i \mathrm{Res}[4(z-1)/(z^2 - 4iz - 1)^2, i(2 - \sqrt{3})] = 2\pi/(3\sqrt{3})$.