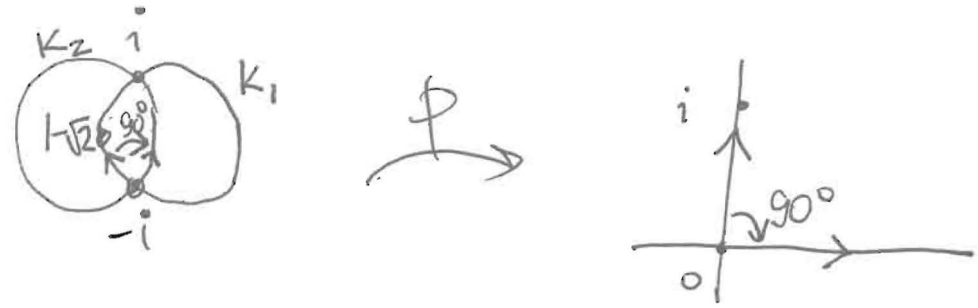
(1)



Ker rob prega obmocja in drugega obmocja tvorijo krožnice/premice, pomislimo na lin. ulomljene (Möbinsove) preslikave:

$$\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

d portavimo na 1,
a, b, c dobimo iz $\phi(-i)=0$

$\phi(1-\sqrt{2}) = i$

$\phi(i) = \infty$

Utemeljitev, da ta ϕ res preslika pro obmocje na drugo:

- lok krožnice K_1 na obeh obmocja gre na pozitivni del y osi, ker smo ~~vse~~ tri točke z njega preslikali na tri točke pozitivnega dela y osi.
- lok krožnice K_2 na obeh obmocja gre v premico skozi točko 0, ki mora z y osjo oklepati ~~[illegible]~~ kot 90 ~~[illegible]~~ ker ϕ ohranja kote in se loka krožnic sekata pod kotom 90°; torej je slika loka krožnice K_2 na obeh obmocja ravno pozitivna x os
- ker je pro obmocje na desni shamtiče premo v smeri $-i, 1-\sqrt{2}, i$, je slika (ohranjenje orientacij!) obmocja tudi na desni poz. y osi, ce premo v smeri $0, i, \infty$.

2. kar. enačba $r(r-2)=0$ $r_1=0$, $r_2=2$

$$y=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+2}$$

DE: $0=z y''-y'+z^3 y = \sum a_k(k+2)(k+1)z^{k+1} - a_k(k+2)z^{k+1} + a_k z^{k+3}$

$$= \sum a_k(k+2)k\, z^{k+1} + \sum a_{k-4} z^{k+1}, \text{ kjer } a_{-1} = a_{-2}=a_{-3}=\dots=0$$

Torej: $(*)$: $a_k k(k+2) + a_{k-4} = 0$, a_0 poljuben

kar ta zveza povezuje člen a_k z indeksom, ki se razlikuje za 4, se splača pisati:

$p=0,1,2,3$:

$$a_{4k+p} = \frac{-a_{4k+p-4}}{(4k+p)(4k+p+2)} = \frac{a_{4k+p-8}}{(4k+p+2)(4k+p)(4k+p-2)(4k+p-4)} = \dots$$

$$\dots = \frac{(-1)^k a_p}{(4k+p+2)!!}$$

$(*)$ pri $k=1$: $a_1\, 1\cdot 3 = 0 \Rightarrow a_1=0$

$k=2$: $a_2\, 2\cdot 4 = 0 \Rightarrow a_2=0$

$k=3$: $a_3\, 3\cdot 5 = 0 \Rightarrow a_3=0$

Torej $a_{4k+p}=0$ za $p=1,2,3$

in $a_{4k} = \dfrac{(-1)^k a_0}{(4k+2)!!} = \dfrac{(-1)^k a_0}{2^{2k+1}(2k+1)!}$

Torej $y(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k+1}(2k+1)!} z^{4k+2} = a_0 \sin\frac{z^2}{2}$

3. S-L. lastni problem: $((1-x^2)y')' = \lambda y$, $y(\pm 1)$ omejen

To je običajen Legendrov S-L problem,

rešitve so: l. f-je: $y_l = P_l(x)$, $l \in \mathbb{N}_0$

$\lambda_l = -l(l+1)$

rešitev: $u(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) C_l(t)$

PDE $\rightarrow$ $\dot{C}_l = -l(l+1) C_l \Rightarrow C_l(t) = A_l e^{-l(l+1)t}$

zač. p. $\rightarrow$ $u(x,0) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) A_l = x + x^2$

kar je $x + x^2 = \frac{1}{3}P_0 + P_1 + \frac{2}{3}P_2$!

dobimo $A_0 = \frac{1}{3}$, $A_1 = 1$, $A_2 = \frac{2}{3}$, $A_k = 0$ za $k \geq 3$

torej $u = \frac{1}{3} e^{-0\cdot(0+1)t} P_0 + 1 \cdot e^{-1\cdot(1+1)t} P_1 + \frac{2}{3} e^{-2\cdot(2+1)t} P_2$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3} + x e^{-2t} + \frac{1}{3}(3x^2-1) e^{-6t}}}$$

(a) $xy'' + y' + xy = 0 \;/\cdot x$

$x^2y'' + xy' + (x^2 - 0^2)y = 0$ To je Besselova NDR za $\nu = 0$, tomu J_0 zadovolňuje tej diferenciálnej rovnici.

$J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$ dostaneš napr. z poteniny riešenia za J_0.

$\mathcal{L}(xy'' + y' + xy) = 0$, $Y = \mathcal{L}(y)$

$$-\frac{d}{ds}(Ys^2 - s) + sY - 1 + \frac{d}{ds}Y = 0$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{-s}{1+s^2}$$

$$\frac{dY}{Y} = -\frac{s\,ds}{1+s^2} \;/\int \rightarrow \quad Y = \frac{C}{\sqrt{1+s^2}}$$

(b) $\mathcal{L}(J_0')(s) = -1 + s\mathcal{L}(J_0) = -1 + \frac{sC}{\sqrt{1+s^2}} \xrightarrow{s\to\infty} -1 + C = 0$
$\Rightarrow C = 1$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(J_0(s)) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$