

## 4. kolokvij iz ANALIZE 2

fizika

17. maj 2007

Vpisna številka:

Ime in priimek:

Vrsta:

Stolpec:

1. [25] Poišči konformno preslikavo med množicama

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| > 1 \text{ in } |z - 2| < 2\}$$

in

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}.$$

2. [25]

(a) [12] Naj bo

$$y = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (1)$$

nastavek za rešitev diferencialne enačbe  $y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$  v okolici točke  $z = 0$ . Karakteristična enačba za  $\lambda$  naj ima dvojno ničlo  $\lambda_1$ , iz česar takoj dobimo rešitev  $y_1$ , ki je oblike (1). Če pri  $y_1$  za  $k > 0$  le izrazimo koeficiente  $a_k$  z  $a_0$  in  $z$   $\lambda$  glede na dobljene rekurzivne formule (ne vstavimo pa  $\lambda = \lambda_1$ ), potem dobimo funkcijo

$$y(z, \lambda) = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda) z^k.$$

Pokaži, da dobimo drugo, od  $y_1$  neodvisno, rešitev s formulo

$$y_2(z) = \left. \frac{\partial y(z, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_1}.$$

(b) [13] Poišči splošno rešitev enačbe  $z^2 y''(z) - z y'(z) + y(z) = 0$  v okolici točke  $z = 0$  v  $\mathbb{C}$ .

3. [25] S Fourierjevo transformacijo reši PDE

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

kjer sta  $-\infty < x < \infty$  in  $0 \leq y \leq 1$ . Pri tem imamo robna pogoja  $u(x, 0) = e^{-2|x|}$  in  $u(x, 1) = 0$ . Velja naj tudi, da gre  $u(x, y) \rightarrow 0$  enakomerno po  $y$ , ko gre  $x \rightarrow \pm\infty$ .

4. [25] Dokaži, da je

$$\int_0^x t \mathcal{J}_0(at) dt = \frac{1}{a^2} (ax \mathcal{J}_1(ax))$$

za vse  $a \neq 0$ .