Domača naloga iz Matematike 4 za poglavje
Besselove funkcije, ortogonalni polinomi, Laplaceova transformacija

Obvezne so vse naloge, razen tistih, ki so označene z N ali z *. Zapiši vse vmesne račune, dvakrat podčrtaj rezultate. Utemelji odgovore. Rok oddaje: 23. maj.

1. Izračunaj:

   a) (3) $\frac{d}{dx}(xJ_1(x) - \int_0^x tJ_0(t)\,dt)$;

   b) (2) vrednost izraza v oklepaju.

   c) (15) Naj bo ξ_{0k} k-ta pozitivna ničla funkcije J_0. Določi koeficiente c_k, da bo
$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\frac{x\xi_{0k}}{2}).$$

2. N (10) Ali je:
$$\int x^{1-\nu} J_\nu(x)\,dx = -x^{1-\nu} J_{\nu-1}(x) + C \quad ?$$

3. Izrazi $J_{-\frac{3}{2}}(z)$ in $J_{\frac{3}{2}}(z)$ z:

   a) (5) $J_{-\frac{1}{2}}(z)$ in $J_{\frac{1}{2}}(z)$ (uporabi rekurzivne formule);

   b) (5) z elementarnimi funkcijami.

4. Izrazi kot linearno kombinacijo Legendrovih polinomov funkcijo:

   a) (2) $f(x) = 6x^2 + 2x + 2$;

   b) (3) $g(x) = 5x^3 + x$;

   c) (5) $p(x) = 5x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

   * d) (10) Od tod določi minimum za
$$\int_{-1}^{1} (p(x))^2\,dx$$
   in koeficiente A, B, C, pri katerem je ta minimum dosežen.

5. Razvij v vrsto po Hermitovih polinomih funkcijo:

   a) (2) $8x^2 + 3x$;

   b) (3) $16x^3 + 4x^2$;

   c) (5) $\sin(ax)$, kjer je $a \in \mathbb{R}$. (Uporabi rodovno funkcijo za primeren z.)

6. N (Posplošeni) Laguerrov diferencialni operator je dan za $\alpha > -1$ z

$$Ly = -xy'' + (x - \alpha - 1)y'.$$

a) (5) Določi utež, tako da bo L simetričen na poltraku $[0, \infty)$.

b) (5) Določi z metodo neznanih koeficientov polinoma stopenj 1, 2 z vodilnim koeficientom 1, ki sta lastni funkciji za L. Kolikšni sta ustrezni lastni vrednosti?

V naslednjih nalogah imajo vse funkcije za definicijsko območje interval $[0, \infty)$.

Izračunaj Laplaceovo transformiranko funkcije $f(t) =$:

a) (3) $2t \sin 3t$;

b) (2) $5 \cos(7t + \frac{\pi}{4})$;

c) (5) $e^{3t} \sin t \cos t$.

7. Naj bosta funkciji f, g dani z $f(t) = e^t$ in $g(t) = t$. Izračunaj konvolucijo funkcij f, g:

   a) (5) neposredno;

   b) (10) čez Laplaceovo transformacijo.

8. *(15) Naj bo f karakteristična funkcija intervala $[0, 1]$. Neposredno izračunaj funkcijo $(f * f)(x)$ in nariši graf te funkcije. Uporabi rezultate s predavanj.

9. N (5) Naj bo $f(t) = 0$ za $t > T$ in $g(t) = f(T - t)$ za $t \leq T$ ter $g(t) = 0$ za $t > T$. Izrazi $G(s)$ z $F(s)$.

10. (5) Naj bo ${y_1}' + y_1 = y_2$, $\quad {y_2}' + 5y_2 = y_3$, $\quad {y_3}' + y_3 = f$ in $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$. Izrazi $Y_1(s)$ s $F(s)$.

11. a) (5) Določi potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, katere Laplaceova transformiranka je enaka $s^{-1} \exp(-s^{-1})$.

    b) (5) Določi funkcijo g, da bo ta potenčna vrsta enaka $J_0(g(t))$.

12. (10) Reši začetni problem $y'' + 6y' + 8y = \delta(t-1)$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ z Laplaceovo transformacijo.