Domača naloga za poglavje:
Holomorfne funkcije

Zapiši vse vmesne račune in utemeljitve. Neobvezni deli so označeni z N ali *. Odgovore dvakrat podčrtaj. Rok oddaje: 4. 4. 2014.

1. Določi vse rešitve enačbe in nariši na eni sliki vsaj tri take rešitve:

   a) (5) $e^z = 2 + i$;

   N b) (5) $\cos z = -\frac{4}{3}i$;

   c) (5) $z^3 = -8i$.

2. Naj bo $u(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y)$.

   a) (10) Izračunaj Δu in določi v, tako da bo $f = u + iv$ holomorfna.

   N b) (5) Poskusi določiti kratko formulo za $f(z)$.

3. (5) Naj bo K krožnica $|z - 2| = 2$. Izračunaj s Cauchyjevo formulo
$$\int_K \frac{(z-1)\sin z}{z^2 - 2z - 3}\, dz.$$

4. (5) Določi vse ničle in njihove stopnje za $g(z) = e^{4z} - e^{2z}$.

5. (5) Določi stopnjo ničle $z = 0$ za $f(z) = z^3(\sin(z^3) - z^3)$.

6. (5) Naj bo L lok elipse $z = 2\cos t + 4i \sin t$; $\quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Izračunaj
$$\int_K z^{-1}\, dz.$$

7. Določi vse singularnosti in njihove tipe za funkcijo f. Določi še glavni in regularni del razvoja v Laurentovo vrsto okrog teh singularnih točk. Tu je $f(z) =$:

a) (10)

$$\frac{\sin(3z) - 3z}{z^5};$$

b) (10)

$$\frac{\sinh z - z}{z^4};$$

c) (10)

$$\frac{\cos z - \cos 3z}{z^2};$$

d) (10)

$$(z+1)^2 \exp((z+1)^{-3});$$

8. (5) Naj bo K enotska krožnica. Izračunaj

$$\int_K z^2 \exp(\frac{2}{z})\, dz.$$

9. N (10) Razvij v Laurentovo vrsto v kolobarju $0 < |z-1| < 1$ funkcijo

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}.$$

Uporabi binomsko vrsto.

10. * a) (10) Določi glavni del Laurentove vrste za

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{1 - \cos z}$$

v $z = 0$ z uporabo metode nedoločenih koeficientov.

b) (5) Od tod izračunaj

$$\int_L f(z)\, dz,$$

kjer je L elipsa $z = \cos t + 4i \sin t; \quad t \in [0, 2\pi]$.

11. Določi analitično funkcijo f, ki polravnino $\mathrm{Re}\ z < -3$ preslika konformno na:

    a) (2) desno polravino $\mathrm{Re}\ z > 0$;

    b) (2) zgornjo polravnino $\mathrm{Im}\ z > 0$;

    c) (5) odprti prvi kvadrant;

    d) (2) odprti drugi kvadrant;

    e) (5) odprti enotski krog.

12. N Določi vse linearne preslikave $f(z) = az + b$, ki preslikajo polravnino $\mathrm{Im}\ z > 0$:

    a) (8) nase;

    b) (2) na polravino $\mathrm{Re}\ z > 0$.

13. N Na kaj preslika funkcija $f(z) = \sin z$:

    a) (1) interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ na realni osi;

    b) (5) poltrak $\left\{z \middle| \mathrm{Re}\ z = \frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\ \geq 0\right\}$;

    c) (5) poltrak $\left\{z \middle| \mathrm{Re}\ z = -\frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\ z \geq 0\right\}$;

    *d) (5) odprti pas $P = \left\{z \middle| -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\ z < \frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\ z > 0\right\}$

    *e) (5) Ali f ohranja kot med intervalom iz (a) in poltrakom v (b)?

    *e) (10) Ali f preslika P bijektivno na $f(P)$?

    * f) (10) Ali f preslika P konformno na $f(P)$?