Domača naloga za poglavje:
Konformne preslikave, harmonične funkcije, Linearne DE, Sturm-Liouville

Zapiši vse vmesne račune in utemeljitve. Neobvezni deli so označeni z N ali *. Odgovore dvakrat podčrtaj. Rok oddaje: 25. 4. 2014.

1. Določi analitično funkcijo f, ki polravnino $\text{Re } z > 0$ preslika konformno na odprti enotski krog, tako da se v 0 preslika točka $z =$:

   a) (5) 1; (Namig: poglej zapiske.)

   b) (5) 3;

   c) (5) 1+i.

2. Območje med krožnicama $|z| = 2$ in $|z + 1| = 1$ konformno preslikaj na:

   a) (5) pas med dvema vzporednima premicama;

   b) (5) pas $0 < \text{Im } z < 2\pi$;

   c) (5) ravnino, prerezano vzdolž negativnega dela realne osi (Namig: poglej zapiske.);

   d) (5) desno polravnino $\text{Re } z > 0$.

3. (10) Najdi funkcijo $u(x, y)$, ki je harmonična na zgornji polravnini $0 < \text{Im } z$; velja pa še $u(x, 0) = 0$ za $x < 0$, $u(x, 0) = -1$ za $0 < x < 1$, $u(x, 0) = 1$ za $x > 1$.

4. N (10) Najdi funkcijo $u(x, y)$, ki je harmonična na zgornji polravnini $0 < \text{Im } z$; velja pa še $u(x, 0) = 0$ za $x < 0$, $u(x, 0) = x$ za $0 < x < 1$, $u(x, 0) = 0$ za $x > 1$.

5. a) (15) Določi potenčno vrsto, ki reši DE $y''(z) + zy(z) = 0$ pri začetnih pogojih $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

   b) (2) Kje konvergira ta vrsta?

6. *(10) Funkcija z zadošča DE

$$z''(x) + (\frac{x^2}{x^2+9})z(x) = 0.$$

Oceni navzgor in navzdol razdaljo med zaporednima ničlama funkcije z na intervalu $(4, \infty)$.

7. Imamo linearni diferencialni operator $Ly = -y''$, omejen na vse dvakrat odvedljive funkcije y na intervalu $[-\pi, \pi]$, za katere velja $y(-\pi) = y(\pi)$ in $y'(-\pi) = y'(\pi)$.

   a) (10) Ali je 0 lastna vrednost za L? Utemelji.

   b) (10) Ali je L simetričen? Utemelji.

   c) (10) Določi vse pozitivne lastne vrednosti in ustrezne lastne funkcije za L. Koliko razsežni so lastni podprostori?

   N d) (10) Ali ima L kako negativno lastno vrednost? Utemelji.

   *e) (5) Funkcija $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ je zvezna in ortogonalna na vse lastne funkcije za L. Kaj lahko rečeš o f? Utemelji.

8. Za funkcije na intervalu $[0, \infty)$ definiramo skalarni produkt z utežjo e^{-x}:

$$[f, g] = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}e^{-x}\,dx.$$

   Naj bo $f(x) = 1$ in $g(x) = \exp(-\frac{x}{4})$ za vsak x.

   a) (10) Določi $[f, f]$, $[g, g]$ in $[f, g]$.

   Določi število a, da bo za $u(x) = x + a$:

   b) (10) $[u, f] = 0$;

   N c) (10) $[u, g] = 0$.

9. Imamo linearni diferencialni operator $Ly = -x^2y'' - xy'$, omejen na vse dvakrat odvedljive funkcije y na intervalu $\left[1, e^2\right]$, za katere velja $y(1) = y(e^2) = 0$.

   a) (10) Določi utež ρ, tako da bo L simetričen na prostoru $L^2\left[1, e^2; \rho\right]$.

   N b) (10) Ali je 0 lastna vrednost za L? Utemelji.

   *c) (5) Ali je to regularen S.-L. problem? Utemelji.

   **d) (15) Določi vse pozitivne lastne vrednosti in ustrezne lastne funkcije. Upoštevaj, da sta realni in imaginarni del kompleksne rešitve homogene linearne DE spet rešitvi.