Domača naloga iz MA4 za poglavje
Variacijski račun

Obvezne so vse naloge, razen nalog in delov označenih z N ali *. Rok oddaje: 12. 03. 2014.

1. Naj bo $a > 0$ in $y(x) = -x$ za $x < -a$, $y(x) = Cx^2 + D$ za $-a < x < a$, $y(x) = x$ za $x > a$.

   a) (5) Določi C, D da bo $y \in C^1(\mathbb{R})$.

   N b) (5) Pri pogojih iz (a) za $A > a$ izračunaj

   $$\int_{-A}^{A} (1 - (y')^2)^2 \, dx$$

   .

   c) (5) Ali je mogoče izbrati C, D, da bo $y \in C^2(\mathbb{R})$?

2. Imamo funkcional

   $$A(y) = \int_{-1}^{1} (4y + (y')^2) \, dx,$$

   kjer je $y \in C^1(-1, 1), \quad y(-1) = 1, \quad y(1) = 3.$

   a) (5) Določi $A(y)$, če je graf za y daljica.

   b) (10) Določi ekstremalo in vrednost funkcionala A na tej ekstremali. Kakšen ekstrem predstavlja?

3. Imamo funkcional

   $$I(y) = \int_{0}^{2} y'(2 + e^x y') \, dx,$$

   definiran na funkcijah $y \in C^1$, z $y(0) = 0$.

   Določi

   a) (15) ekstremalo in

   N b) (5) vrednost funkcionala I na tej ekstremali.

4. (20) Določi minimum integrala

   $$B(y) = \int_{0}^{2} (y')^2 \, dx,$$

   če za funkcijo $y \in C^1$ velja $y(0) = y(2) = 0$ in $\int_0^2 y^2 \, dx = 4$.

5. (20) Določi ekstremalo za funkcional

$$F(y,z) = \int_0^1 (-2y - 2xy' + (y')^2 + (z')^2 + 2yz)\, dx$$

pri začetnih pogojih $y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = \sinh 1$.

6. (20) Poišči ekstremale za

$$B(y) = \int_0^1 (2ye^x - (y'')^2)\, dx$$

pri pogoju $y(0) = y'(0) = 0$ in $y(1) = e, \quad y'(1) = e + 1$.

7. N (20) Poišči ekstremale za

$$A(y) = \int_0^1 (8y + 2y' + 2yy' + (y')^2)\, dx.$$

8. N Imamo funkcional

$$T(y) = \int_{-1}^1 ((y')^2 - 1)^2\, dx.$$

a) Kakšnega predznaka je $T(y)$?

* b) (10) Ugani in nariši grafa dveh zveznih funkcij y_1, y_2, ki sta odvedljivi povsod, razen v $x = 0$, $y_i(-1) = y_i(1) = 1$ in $T(y_i) = 0$ za $i = 1, 2$.

*c) (10) Uporabi prvo nalogo in dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $y \in C^1[-1,1]$, $\quad y(-1) = 1 = y(1)$ in $T(y) < \epsilon$.

**d) (10) Ali obstaja funkcija $y \in C^1[-1,1]$, $\quad y(-1) = 1 = y(1)$, za katero je $T(y)$ minimalen? Utemelji.

*e) (5) Nariši zvezno funkcijo z, ki ni odvedljiva v natančno treh točkah, $z(-1) = 1 = z(1)$ in za katero je $T(z) = 0$. Pokaži, da - razen v omenjenih treh točkah - funkcija z zadošča Euler-Lagrangevi enačbi.

* f) (10) Ugani in nariši grafa dveh zveznih funkcij y_1, y_2, ki sta odvedljivi povsod, razen v eni točki, $y_i(-1) = 1, \quad y_i(1) = 0$ in $T(y_i) = 0$ za $i = 1, 2$.