1. Delec v neskončni potencialni jami opiše valovna funkcija ψ, ki je linearna kombinacija osnovnega ψ_1 in prvega vzbujenega stanja ψ_2. Povprečna energija stanja je 3/2 energije osnovnega stanja. Kolikšno je razmerje povprečnih energij stanja ψ in ortogonalnega stanja $\psi_\perp$, sestavljenega iz ψ_1 in ψ_2? Kolikšni sta za funkciji ψ in $\psi_\perp$ verjetnosti, da delec najdemo v osnovnem stanju?

   Rešitev: Funkcijo $\psi = a\psi_1 + b\psi_2$ določimo iz pogoja normalizacije in njene energije,

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \text{ in } |a|^2 E_1 + |b|^2 E_2 = \left(|a|^2 + 4|b|^2\right) E_1 = \frac{3}{2} E_1$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{5}{6}}, b = \sqrt{\frac{1}{6}}.$$

   Podobno določimo ortogonalno funkcijo $\psi_\perp = c\psi_1 + d\psi_2$ iz pogoja normalizacije in ortogonalnosti $\langle \psi_\perp | \psi \rangle = 0$,

$$|c|^2 + |d|^2 = 1 \text{ in } ac + bd = 0$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{6}}, d = -\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

   Razmerje povprečnih energij stanja ψ in $\psi_\perp$ je potem

$$\frac{E}{E_\perp} = \frac{3/2 E_1}{c^2 E_1 + 4d^2 E_1} = \frac{3}{7}.$$

   Verjetnost, da delec najdemo v osnovnem stanju je za funkcijo ψ enaka $p(\psi_1) = a^2 = 5/6$, za funkcijo $\psi_\perp$ pa $p_\perp(\psi_1) = c^2 = 1/6$.

2. S pomočjo načela nedoločenosti oceni nedoloenost lege in energijo osnovnega stanja elektrona, ki se nahaja v aharmonskem potencialu

$$V = \frac{kx^2}{2}\left[1 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^4\right],$$

kjer je $k = 50\ \mathrm{eV/nm}^2$ in $x_0 = 0.2$ nm.

Rešitev: Za povprečno energijo velja

$$\langle E\rangle = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} + \frac{1}{2}k\left(\langle x^2\rangle + \frac{\langle x^6\rangle}{x_0^4}\right).$$

Za simetrično funkcijo oscilatorja simetrično okrog izhodišča je $\langle x\rangle = 0 = \langle p\rangle$, torej lahko ocenimo

$$\langle p^2\rangle = \delta p^2, \quad \langle x^2\rangle \simeq \delta x^2, \quad \langle x^6\rangle \simeq \delta x^6,$$

od kod sledi

$$\langle E\rangle \simeq \frac{\delta p^2}{2m} + \frac{1}{2}k\left(\delta x^2 + \frac{\delta x^6}{x_0^4}\right).$$

Z uporabo načela nedločenosti $\delta p\, \delta x \gtrsim \frac{\hbar}{2}$ ocenimo spodnjo mejo za $\langle E\rangle$ in njen odvod po δx^2 postavimo na nič,

$$\langle E\rangle_{\min} \gtrsim \frac{\hbar^2}{8m\delta x^2} + \frac{k}{2}\left(\delta x^2 + \frac{(\delta x^2)^3}{x_0^4}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\langle E\rangle_{\min}}{\partial \delta x^2} = -\frac{\hbar^2}{16m\delta x^4} + \frac{k}{2}\left(1 + 3\frac{\delta x^4}{x_0^4}\right) = 0.$$

Pogoj minimalnosti se prevede v kvadratno enačbo za δx^4,

$$(\delta x^4)^2 + \frac{x_0^4}{3}\delta x^4 - \frac{\hbar^2 x_0^4}{12mk} = 0,$$

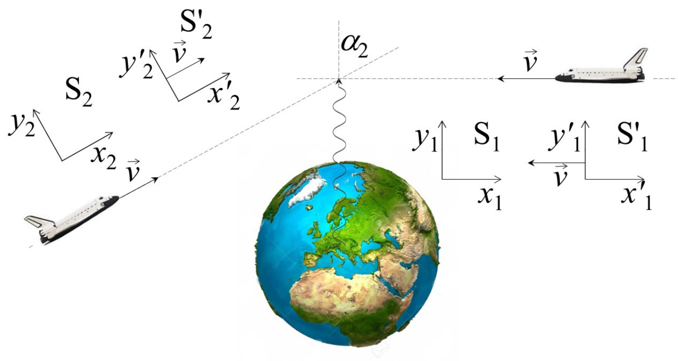
katere rešitev je

$$\delta x^4 = \frac{x_0^4}{6}\left(\sqrt{1 + 3\frac{(\hbar c)^2}{m_e c^2 k x_0^4}} - 1\right) = (0.127\ \mathrm{nm})^4.$$

Iz enačbe (1) potem sledi

$$\langle E\rangle_{\min} \gtrsim 1.1\ \mathrm{eV}.$$

3. Z Zemlje oddamo signal pod kotom 90° glede na smer gibanja bližajoče se vesoljske ladje. Pod neznanim kotom se z enako hitrostjo Zemlji približuje druga vesoljska ladja, v kateri sprejmejo valovanje pod kotom 90° glede na smer gibanja. Izmerjena frekvenca na prvi ladji je za tretjino večja od tiste na drugi. S kolikšno hitrostjo potujeta ladji in pod kolikšnim kotom glede na oddano valovanje se giblje druga za opazovalca za Zemlji?



Rešitev: Frekvenco oddanega valovanja označimo z ω, sprejetega valovanja na prvi in drugi vesoljski ladji pa zaporedoma z ω_1' in ω_2'. V sistemim S_1 in S_1' (glej sliko) sta četverca valovnaga vektorja

$$
\begin{aligned}
k_1^\mu &= \frac{\omega}{c}(1,0,1,0),\\
k_1'^\mu &= \frac{\omega_1'}{c}(1,\cos\alpha_1',\sin\alpha_1',0).
\end{aligned}
$$

Lorentzova transformacija iz sistema S_1 v S_1' da $\omega_1' = \gamma\omega$. Podobno za sistema S_2 in S_2' velja

$$
\begin{aligned}
k_2^\mu &= \frac{\omega}{c}(1,\cos\alpha_2,\sin\alpha_2,0),\\
k_2'^\mu &= \frac{\omega_2'}{c}(1,0,1,0).
\end{aligned}
$$

Obratna Lorentzova transformacija iz sistema S_2' v S_2 v tem primeru da $\omega = \gamma\omega_2'$, od koder sledi $\omega_1' = \gamma^2\omega_2'$. Torej,

$$
\frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \frac{4}{3} = \gamma^2 \;\Rightarrow\; v = c/2.
$$

Z obratno Lorentzovo transformacijo x komponente valovnega vektorja za drugo vesoljsko ladjo dobimo še

$$
\omega\cos\alpha_2 = \gamma\beta\omega_2' \;\Rightarrow\; \cos\alpha_2 = \beta \;\Rightarrow\; \alpha_2 = 60°.
$$

4. Mioni imajo ob nastanku hitrost $0.1c$ vzdolž električnega polja z jakostjo 20 kV/m. Kolikšno povprečno pot in življenjski čas bomo izmerili, če je lastni razpadni čas miona $\tau_\mu = 2.2\,\mu$s in njegova mirovna masa 105 MeV/c^2?

Rešitev: Z lastnim časom lahko zapišemo enačbi gibanja in začetni pogoja

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 &= \alpha\, u_1, & \dot{u}_1 &= \alpha\, u_0, \\ u_0(0) &= \gamma_0 c, & u_1(0) &= \gamma_0\beta_0 c, \end{aligned} \tag{2}$$

kjer so $\alpha = eE/mc$, $\alpha\tau_\mu = 0.126$, $\beta_0 = 0.1$ in $\gamma_0 = 1.005$. Rešitev sistema nastavimo s hiperboličnimi funkcijami in upoštevamo robne pogoje

$$\begin{aligned} u_0(\tau) &= A\cosh\alpha\tau + B\sinh\alpha\tau \Rightarrow A = \gamma_0 c, \\ u_1(\tau) &= C\cosh\alpha\tau + D\sinh\alpha\tau \Rightarrow C = \gamma_0\beta_0 c. \end{aligned}$$

Vstavimo rešitev v enačbo (2), dobimo $B = C$, $D = A$ in končno

$$\begin{aligned} u_0(\tau) &= \gamma_0 c\left(\cosh\alpha\tau + \beta_0\sinh\alpha\tau\right), \\ u_1(\tau) &= \gamma_0 c\left(\beta_0\cosh\alpha\tau + \sinh\alpha\tau\right). \end{aligned}$$

Izmerjeni čas in opravljeno pot v laboratorijskem sistemu dobimo z integracijo $u_{0,1}(\tau)$

$$\begin{aligned} t &= \int_0^{\tau_\mu} \frac{u_0(\tau)}{c}\, d\tau = \tau_\mu\left(\frac{\gamma_0}{\alpha\tau_\mu}\right)\left(\sinh\alpha\tau_\mu + \beta_0\left(\cosh\alpha\tau_\mu - 1\right)\right) = 2.23\,\mu\text{s}, \\ l &= \int_0^{\tau_\mu} u_1(\tau)\, d\tau = c\tau_\mu\left(\frac{\gamma_0}{\alpha\tau_\mu}\right)\left(\beta_0\sinh\alpha\tau_\mu + \left(\cosh\alpha\tau_\mu - 1\right)\right) = 108.3\ \text{m}. \end{aligned}$$

Nalogo lahko rešimo tudi z laboratorijskim časom. Iz ohranitve gibalne količine

$$\begin{aligned} m\, d(\gamma v) &= eEdt, \\ \gamma\beta - \gamma_0\beta_0 &= \frac{eE}{mc} t \equiv \alpha t, \end{aligned}$$

dobimo, kako se hitrost spreminja z laboratorijskim časom,

$$\beta = \frac{\alpha t + \gamma_0\beta_0}{\sqrt{1 + \left(\alpha t + \gamma_0\beta_0\right)^2}}.$$

Iz definicije $dt = \gamma(t)d\tau$ najdemo zvezo med laboratorijskim in lastnim časom

$$\begin{aligned} \tau_\mu &= \int_0^{\tau_\mu} d\tau = \int_0^{t_\mu} \frac{dt}{\gamma(t)} = \int_0^{t_\mu} \frac{dt}{\gamma(t)} \\ &= \int_0^{t_\mu} \sqrt{1 - \beta(t)^2}\, dt, \end{aligned}$$

$$\alpha t_\mu = \sinh(\alpha\tau_\mu + \operatorname{arcsinh}(\gamma_0\beta_0)) - \gamma_0\beta_0 = 0.127.$$

Prepotovana pot nato sledi iz integracije hitrosti

$$l = c\int_0^{t_\mu} \beta(t)\, dt = \frac{c}{2\alpha}\int_{\gamma_0^2}^{1+(\alpha t_\mu + \gamma_0\beta_0)^2} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{c}{\alpha}\left(\sqrt{1 + (\alpha t_\mu + \gamma_0\beta_0)^2} - \gamma_0\right).$$