Uvod

Verjetnost je najbolje opisati kot integral (tudi v več dimenzijah):

$$\int_a^b \sqcup \rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Povprečje:

$$\langle A\rangle = \frac{\int_a^b A(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x}$$

Projekcija (eliminacija nepomembne spremeljivke): Po potrebi preidemo na nove spremeljivke in izintegriramo vse razen tiste katere odvisnost iščemo.

$$\int \underbrace{\int \rho(u,v)\,\mathrm{d}u}_{\text{integriramo}}\,\mathrm{d}v = \int \rho(v)\,\mathrm{d}v$$

Zamenjava spremeljivk: kar zamenjava spremeljivk v integralu. V eni dimenziji:

$$\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} \rho(u)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right|\,\mathrm{d}u$$

V splošnem:

$$\iint\limits_V \rho(x,\ldots,z)\,\mathrm{d}x\cdots\,\mathrm{d}z = \iint\limits_V \rho(u,\ldots,w)|J|\,\mathrm{d}u\cdots\,\mathrm{d}w$$

Pri tem integracijsko območje zamenjamo kakor pač znamo, $|J|$ je pa Jakobijeva determinanta:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

Velja:

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \left(\det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right)^{-1}$$

Včasih je lažje izražat od zadaj.
Izražava z enakomerno porazdelitvijo - nedoločeno integriramo:

$$\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}u; \quad u = \frac{\int_a^x \rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x}$$

Z drugimi besedami, u je kumulativa porazdelitve $\rho(x)$.
primer:

$$\frac{3}{R^3}\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r = \int_0^1 \mathrm{d}\left(\frac{r^3}{R^3}\right)$$

Kaj to pomeni: če je r porazdeljen kot r^2, potem je $(r/R)^3$ porazdeljen enakomerno!
Porazdelitev vsote spremeljivk je enaka konvoluciji posameznih porazdelitev:

$$\rho(x+y) = \rho(x) * \rho(y)$$

Posledica: pri vsoti N meritev velja za povprečje

$$\left\langle \sum x \right\rangle = N\langle x\rangle$$

in za disperzijo

$$\left\langle \sum (x-\langle x\rangle)^2 \right\rangle = N\sigma^2$$

Torej, če povprečimo N meritev, izboljšamo natančnost:

$$\sigma_N^2 = \sigma_1^2/N$$

Binomska porazdelitev: znano število Z meritev, dve možnosti, z verjetnostima p in $1-p$.

$$P(N) = \binom{Z}{N} p^N (1-p)^{Z-N}$$

$$\langle N\rangle = Zp$$

$$\sigma^2 = Zp(1-p)$$

Poissonova porazdelitev: znano povprečno število (neodvisnih) dogodkov, vendar ne kot izid po znanem številu poskusov ampak koliko dogodkov se zgodi (ponavadi število dogodkov v nekem času, pri konstantni verjetnosti gostoti v času).

$$P(N) = \frac{\langle N\rangle^N e^{-\langle N\rangle}}{N!}$$

$$\sigma^2 = \langle N\rangle$$

Obe porazdelitvi za namen lažjega računanja lahko aproksimiramo z Gaussovo funkcijo pri istem povprečju in disperziji.

1 Kodre::11.2.3

Površina dolgega homogenega valja je premazana s tanko plastjo sevalca gama. Določi (pri zanemaritvi sipanja), kolikšen delež vsega sevanja, ki vstopa v kroglo, se v njej tudi absorbira! Absorpcijski koeficient je tolikšen, da se curek delcev pri preletu premera oslabi na pol.

Iz vsake točke površine valja se izsevajo žarki izotropno v vse smeri. Enakomerno porazdelitev po smereh lahko zapišemo v sferičnih polarnih koordinatah kot

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}(\cos\theta)\,\mathrm{d}\phi$$

Smer z je usmerjena pravokotno na steno cilindra, x pa v smeri osi cilindra. Upoštevali smo, da se polovica sevanja izseva navzven in ga v račun ne štejemo. Zato teče $\cos\theta$, ki je z komponenta vektorja smeri, samo od 0 navzgor. Porazdelitev je normirana.

Iz vsake točke cilindra bo sevanje izgledalo povsem enako, zato je dovolj da obravnavamo samo eno sevalno točko. Sedaj potrebujemo izraz za dolžino tetive, ki jo napenja žarek od izsevanja do takrat, ko naslednjič prebode cilinder. To najlažje izračunamo z vektorji. Če je točka sevanja $(0, 0, -R)$ (postavimo jo na spodnjo točko valja), potem je poljubna točka na žarku

$$\vec{r} = (0, 0, -R) + l(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

l pri katerem je pravokotni del vektorja $\vec{r}$ oddaljen od izhodišča za R, je kar dolžina žarka! Pravokotni del je mišljen tisti del, ki je pravokoten na os cilindra (x), torej

$$\vec{r}_\perp = (0, 0, -R) + l(\underbrace{0}_{!}, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

$$||\vec{r}_\perp||^2 = R^2$$

$$R^2 + l^2(\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta) - 2Rl\cos\theta = R^2$$

$$l = 2R\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta}$$

Delež absorbiranih žarkov je podan z enačbo za eksponentno pojemanje verjetnosti:

$$\rho(l) = e^{-\mu l}$$

Povprečen delež pa dobimo z integracijo

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho(l)\,\mathrm{d}(\cos\theta)\,\mathrm{d}\phi$$

Tukaj smo količino, ki jo želimo povprečiti, vstavili v integral porazdelitve.

2 Kodre::11.2.4,5

Enakomeren dež majhnih prožnih kroglic pada na vodoraven tog valj. Kakšna je smerna porazdelitev kroglic po trku z valjem?

Če valj leži v ravnini xy in kroglice padajo od zgoraj, je porazdelitev vpadlih kroglic enakomerna po x:

$$\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \mathrm{d}x$$

Merimo polarni kot ϕ v valju stran od navpičnice. Po odboju kroglice potujejo v smeri $\theta = 2\phi$ (odbojni zakon). Iščemo torej porazdelitev po θ, zato moramo zamenjati spremeljivko porazdelitve. Po cilindričnih koordinatah velja $x = R\sin\phi$. Integral se torej glasi

$$\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \mathrm{d}(R\sin\phi) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}(\theta/2) = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

Pri tem smo pazili na menjavo mej integrala pri menjavi spremeljivk.

Verjetnostna gostota porazdelitve je tisto v integralu:

$$\rho(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}$$

Če imamo opravka s kroglo, namesto z valjem, potem je prvotna porazdelitev enakomerna po krogu v ravnini xy:

$$\frac{2}{R^2}\int_0^R r\,\mathrm{d}r$$

V sferičnih koordinatah je $r = R\sin\theta$. Zgoraj smo že upoštevali, da je po polarnem kotu porazdelitev enakomerna in smo jo že izintegrirali. Odbojni kot je spet $\Omega = 2\theta$. Vstavimo nove spremeljivke v integral:

$$2\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\Omega\,\mathrm{d}\Omega$$

Vidimo, da se pri valju največ kroglic odbije navzgor (maksimum kosinusa), pri krogli pa se jih največ odbije pravokotno (maksimum sinusa).

3 Porazdelitev produkta xy

Žrebamo števili x in y po enakomerni porazdelitvi med 0 in 1. Kako je porazdeljen produkt xy?

Zapišimo enakomerno porazdelitev z x in y:

$$\int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Ker iščemo porazdelitev po xy, moramo zamenjati spremeljivke, tako da bo ena izmed njih xy. Potem moramo preostalo spremeljivko izintegrirati. Postavimo

$$u = xy, \quad v = \arctan\frac{y}{x}$$

Druga spremeljivka je kar običajen polarni kot. Sedaj potrebujemo Jakobijevo determinanto. Najlažje je izračunati jakobijan za prehod iz uv na xy; jakobijan za v obratno smer je samo obratna vrednost tega.

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = 2\frac{y/x}{1+(y/x)^2} = 2\frac{\tan v}{1+\tan^2 v}$$

Integral se torej transformira kot

$$\int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint \frac{1}{2}\frac{1+\tan^2 v}{\tan v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

Manjkajo nam še nove meje integrala. u je produkt dveh števil med 0 in 1 in se zato spreminja v istih mejah. v pa za nek u ne more biti manj od $\arctan u$ (y/x je pri danem u najmanjši, ko je $x = 1$ in $y = u$). Zgornjo mejo dobimo s simetrijo: ker mora biti simetrično na zamenjavo $x \iff y$, je ta meja $\pi/2 - \arctan u$ (zrcaljenje čez simetralo lihih kvadrantov). Z mejami integral postane

$$\int_0^1 \int_{\arctan u}^{\pi/2-\arctan u} \frac{1}{2}\frac{1+\tan^2 v}{\tan v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

Ker iščemo samo porazdelitev po u (notranji del je samo pogojna verjetnost glede na v pri fiksnem u), moramo notranji integral izintegrirati. Mathematica ali računske spretnosti pokažejo, da dobimo

$$-\int_0^1 \ln u\,\mathrm{d}u$$

Porazdelitev je torej logaritemska.

4 Kodre::11.4.6

Iz posode, v kateri je segret ioniziran plin v termičnem ravnovesju, uhaja skozi drobno luknjico tanek curek pozitivnih ionov. Po pospešitvi s konstantno napetostjo ulovimo ione na zbirno elektrodo. Kakšna verjetnostna porazdelitev velja za ione, ki jih ujamemo v danem času?

Začetna porazdelitev je Maxwellova - če izhajajo molekule skozi majhno luknjico, gledamo samo ozek snop izotropne Maxwellove porazdelitve: kotni del lahko zanemarimo in ostane samo

$$\int_0^\infty v^2 e^{-\beta m v^2/2}\,\mathrm{d}v$$

Porazdelitev po času pa pomeni, da ne zaznamo molekul z verjetnostjo, sorazmerno z zgornjim izrazom: hitrejših molekul pride več (v časovnem intervalu $\mathrm{d}t$ pridejo iz luknjice vse molekule iz volumna $Sv\,\mathrm{d}t$, se pravi je gostota toka v odvisnosti od hitrosti sorazmerna z $\rho(v)S\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \sim v\rho(v)$). Prava porazdelitev je zato

$$\int_0^\infty v^3 e^{-\beta m v^2/2}\,\mathrm{d}v$$

Pospeševanje elektronom samo dodaja energijo, se pravi

$$\tfrac{1}{2}mv'^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + eU$$

$$v'^2 = v^2 + 2eU/m$$

v^2 moramo iz tega vstaviti v zgornjo porazdelitev. Za zamenjavo spremeljivk potrebujemo še $v'\,\mathrm{d}v' = v\,\mathrm{d}v$.

$$\int_{\sqrt{2eU/m}}^\infty v^3 e^{-\beta m(v'^2-2eU/m)/2}\frac{v'}{v}\,\mathrm{d}v'$$

$$\int_{\sqrt{2eU/m}}^\infty (v'^2-2eU/m)v' e^{-\beta m(v'^2-2eU/m)/2}\,\mathrm{d}v'$$

Porazdelitev je treba še normirati, ker je na začetku nismo:

$$\frac{\beta m}{2}\int_{\sqrt{2eU/m}}^\infty (v'^2-2eU/m)v' e^{-\beta m(v'^2-2eU/m)/2}\,\mathrm{d}v'$$

5 Kodre::11.5.10

V megli je 600 vodnih kapljic na cm^3. Velikost kapljic je zvezno porazdeljena: verjetnostna gostota po radiju je sorazmerna z re^{-r/r_0}, pri čemer je $r_0 = 5\,\mu$m. V mirujočem zraku se kapljice počasi usedajo, in sicer velja linearni zakon upora: $F = 6\pi r\eta v$. Kako debela plast vode se nabere na tleh v eni uri?

Imamo porazdelitev po radiju, za hitrost usedanja pa potrebujemo zvezo med hitrostjo in radijem. Iz Newtonovega zakona dobimo

$$v = r^2 \frac{2\rho g}{9\eta} = Ar^2$$

V času $\mathrm{d}t$ se usedejo vse kapljice iz volumna $Sv\,\mathrm{d}t$. Teh je $\rho_m Sv\,\mathrm{d}t$, kjer je ρ_m podana številska gostota kapljic. Vsaka kapljica prispeva za en lastni volumen vode. Pretok pri dani hitrosti je zato

$$\frac{j}{S} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \rho_m v \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi A \rho_m r^5 = Br^5$$

Povprečen pretok po porazdelitvi po radiju je pa potem

$$\langle j/S \rangle = \frac{\int_0^\infty Bre^{-r/r_0} r^5\,\mathrm{d}r}{\int_0^\infty re^{-r/r_0}\,\mathrm{d}r} = \frac{6!}{1!} Br_0^5$$

Uporabili smo definicijo gama funkcije za izračun integralov. B vsebuje samo podatke o sestavi megle, viskoznosti zraka, gostoti vode, in še kaj...

6 Kodre::11.6.5

Za analizo žitne mešanice so prešteli 1000 zrn. Ugotovili so 850 pšeničnih in 150 rženih zrn in iz tega sklepali, da je v mešanici 85% pšeničnih zrn in 15% rženih. Kako natančna je ta ugotovitev?

Ker imamo znano število izmerkov $Z = 1000$ z dvema možnima izidoma, delamo po binomski porazdelitvi, pri kateri je $p = 85\%$ (pšenično zrno je uspešen izid, rženo neuspešen). Preberemo lahko izpeljane izraze za negotovost števila izmerkov:

$$N = Zp \pm \sqrt{Zpq}$$

Oceno deleža smo dobili s kvocientom N/Z, ki je zato tudi nedoločen:

$$p' = \frac{N}{Z} = p \pm \sqrt{\frac{pq}{z}} = 0.85 \pm 0.011$$

7 Kodre::11.6.13

V smrekovem gozdu so izmerili verjetnost, da je drevo v starosti t okuženo z lubadarjem in dobili zvezo $w = \frac{(t/t_0)^2}{1+(t/t_0)^2}$, v kateri je parameter $t_0 = 35\,$let. Kolikšna je verjetnost, da bo med 20 na slepo izbranimi 40-letnimi smrekami več kot polovica zdravih?

Kot vedno verjetnost okužbe za posamezno smreko dobimo iz verjetnostne porazdelitve:

$$p = w(t) = 0.566$$

Na tej verjetnosti je postavljena binomska statistika: za $Z = 20$ poznamo povprečno vrednost in povprečni odmik:

$$N = Zp \pm \sqrt{Zpq} = 11.3 \pm 2.2$$

Za izračun verjetnosti da je več kot polovica zdravih, aproksimiramo porazdelitev z Gaussovo za znano povprečje in disperzijo. Rešitev integrala

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{Z/2}^{\infty} e^{-(N-\langle N \rangle)^2/2\sigma^2} \, \mathrm{d}N$$

preberemo iz tabel za $\mathrm{erf}(x)$.

8 Kodre::11.7.6

Za študente, ki uporabljajo dvigalo v stavbi Oddelka, je porazdelitev po masah približno Gaussova s parametroma $\langle m \rangle = 70\,\mathrm{kg}$ in $\sigma = 10\,\mathrm{kg}$. Dvigalo je projektirano za največ 6 oseb ali za skupno maso 500 kg. Kolikšna je verjetnost, da masa šestih naključno zbranih študentov preseže dovoljenih 500 kg?

Porazdelitev vsote mas $N = 6$ študentov je porazdeljena po šestkratni konvoluciji prvotne porazdelitve. Konvolucija Gaussove porazdelitve same s seboj samo sešteva povprečja in kvadratne odmike:

$$\langle m' \rangle = N \langle m \rangle$$

$$\sigma^{2\prime} = N\sigma^2$$

Podobno bi naredili tudi v primeru, če prvotna porazdelitev ne bi bila Gaussovska. Ker se s konvolucijo porazdelitev približuje Gaussovi, bi samo izračunali povprečje in disperzijo prvotne porazdelitve in računali kot da je konvolucija Gaussova funkcija.

Verjetnost za preseganje $M = 500\,\mathrm{kg}$ dobimo z integracijo:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'}} \int_{M}^{\infty} e^{-(m-\langle m \rangle)^2/2\sigma'^2} \, \mathrm{d}m$$

9 Krševan::1

V samotni pokrajini stoji avtomatični seizmograf, ki javlja po radijski zvezi podatke o potresih z magnitudo nad 2. Takih dogodkov, ki so slučajni in neodvisni med seboj, je v povprečju petnajst na deset dni. Seizmograf pa zabeleži dnevno tudi vlaka ob 6.00 in 18.00, ki peljeta po oddaljenem tiru in katerih seizmični signal je neločljiv od pravega potresa. Določi povprečni časovni interval med dvema signaloma seizmografa in njegovo standardno deviacijo. Določi tudi mediano in oba kvartila porazdelitve. Kolišna je verjetnost, da bo seizmograf v 24 urah zabeležil samo prehod obeh vlakov?

Naj bo λ verjetnostna gostota dogodkov v času ($\lambda = \frac{15}{10 \cdot 24h} = 0.0625h^{-1}$).

Časovni interval med dogodki je definiran z začetnim in končnim dogodkom. Kar je treba storiti je, da za nek začetni čas določimo porazdelitev, potem pa pointegriramo po njem. V tem primeru je lahko prvotni dogodek bodisi od vlaka, bodisi od potresa. Začetni dogodki so porazdeljeni kot

$$\frac{1}{1+\lambda T} \int_{0}^{T} (\delta(\tau) + \lambda) \, \mathrm{d}\tau$$

Prvi člen je sunek od vlaka, drugi pa od zvezne porazdelitve verjetnostne gostote dogodkov. Dobili smo tipični primer mešane porazdelitve (pa tudi normirali smo jo).

Po drugi strani pa za nek začetni τ vemo, da so *intervali* potresnih dogodkov porazdeljeni eksponentno, s porazdelitvijo $\lambda e^{-\lambda t}$. Pri tem pa vsi intervali, daljši od $T - \tau$ (takrat pride vlak) prepovedani - preostanek po normalizaciji se manifestira kot delta funkcija pri tem času - če ni bilo vmes nobenega potresa, potem vlak zaključi interval. Se pravi

$$\int \rho(t,\tau) \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{T-\tau} \left(\lambda e^{-\lambda t} + e^{-\lambda(T-\tau)} \delta(t - (T-\tau)) \right) \mathrm{d}t$$

Pri tem smo se spet poslužili zapisa z integrali, ker s tem nedvoumno povemo v kakšnih mejah se spreminja t (res da je prvi člen eksponentna porazdelitev, vendar je odrezana pri času $t = T - \tau$ ker takrat pride vlak in zagotovo sproži dogodek).

Porazdelitev po t potem dobimo tako, da integriramo po vseh začetnih časih τ, ki so porazdeljeni po prvem omenjenem integralu (kot ponavadi, porazdelitev samo vtaknemo zraven v integral).

$$\int \rho(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\lambda T}\int_0^T (\delta(\tau)+\lambda)\int_0^{T-\tau}\rho(t,\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau$$

$$\int \rho(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\lambda T}\left(\int_0^T \rho(t,0)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_0^T\int_0^{T-\tau}\rho(t,\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\right)$$

Prvi člen je samo uporabljena delta funkcija, pri drugem pa moramo paziti, da mora vedno veljati tudi $\tau < T - t$: ker hočemo porazdelitev po t, moramo vrstni red integracij zamenjati. Tukaj je to rutinsko: brez integralskega zapisa bi morali s sklepanjem ugotoviti, po kakšnem območju teče τ.

$$\int \rho(t) = \int_0^T \left(\frac{1}{1+\lambda T}\left(\lambda e^{-\lambda t} + e^{-\lambda T}\delta(t-T) + \lambda e^{-\lambda(T-(T-t))} + \lambda^2\int_0^{T-t} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{d}t$$

Na tem koraku smo tudi vstavili $\rho(t,\tau)$. Iz mej zunanjega integrala se vidi, da bodo intervali tekli samo od 0 do T.

$$\int \rho(t) = \int_0^T \left(\frac{1}{1+\lambda T}\left(\lambda e^{-\lambda t} + e^{-\lambda T}\delta(t-T) + \lambda e^{-\lambda t} + \lambda^2 (T-t) e^{-\lambda t}\right)\right)\mathrm{d}t$$

$$\int \rho(t) = \int_0^T \left(\frac{1}{1+\lambda T}\left(e^{-\lambda T}\delta(t-T) + (2\lambda + \lambda^2(T-t))e^{-\lambda t}\right)\right)\mathrm{d}t$$

Delta funkcija predstavlja verjetnost, da zaznamo samo vlaka ($P = \frac{e^{-\lambda T}}{1+\lambda T}$). Ostalo pa dobimo na običajen način: povprečje in disperzijo z integracijo t in t^2. Dobimo

$$\langle 1\rangle = \int_0^T \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\langle t\rangle = \int_0^T t\rho(t)\,\mathrm{d}t = \frac{T}{1+\lambda T}$$

$$\left\langle t^2\right\rangle = \int_0^T t^2\rho(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}\frac{e^{-\lambda T}+\lambda T - 1}{1+\lambda T}$$

Iz tega potem dobimo

$$\sigma^2 = \left\langle t^2\right\rangle - \langle t\rangle^2$$

Kvantile določimo iz kumulativne porazdelitve. Kumulativna porazdelitev

$$F(x) = \int_0^x \langle t\rangle\ \mathrm{d}t = 1 + e^{-\lambda x}\frac{\lambda(x-T)-1}{1+\lambda T}$$

Kvartila sta rešitvi enačb $F(x) = \frac{1}{4}$, $F(x) = \frac{3}{4}$, mediana pa podobno: $F(x) = \frac{1}{2}$.

Zapisanim rešitvam ne zaupajte, ker so pridobljene z Mathematico brez dodatnega preverjanja.

10 Serševan::4

Asteroid kroglaste oblike s polmerom 50 km je po vsej površini enakomerno gosto pokrit z rudarskimi naselbinami. Rezervne dele za vrtalne naprave dobavlja servisna služba z majhnim raketnim hopperjem, ki leta po najkrajši poti od klica do klica, ti pa se pojavljajo naključno in enakomerno po vsem površju. Kolikšna je povprečna dolžina poleta in kolikšen je njen efektivni kvadratni odmik? S kolikšno verjetnostjo se pojavljajo poleti, ki so daljši od 100 km? Kolikšna je verjetnost, da bo med desetimi poleti, ki jih opravi ekipa v delovnem dnevu, samo eden krajši od 100 km? Dodatno vprašanje: oceni verjetnost, da bo imela ekipa več kot 100 takih dni v delovnem letu, ki traja 300 dni.

Najprej rešimo verjetnostni del naloge: kako so porazdeljene dolžine krožnih lokov po krogli? Odmislimo za zdaj polmer R (delamo v brezdimenzijskih količinah, ki so sedaj razmerja med količino in polmerom). Porazdelitev na krogli je spet

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

Porazdelitev po θ je enostavno dobiti, ker je θ že ena izmed spremeljivk:

$$\int\rho(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Dolžine letov so torej porazdeljene sinusno ($l = R\theta$).
Tej porazdelitvi zlahka izračunamo povprečno dolžino poleta in efektivni kvadratni odmik:

$$\langle\theta\rangle = \int_0^{\pi}\theta\rho(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

To bi lahko že uganili iz simetrije.

$$\left\langle\theta^2\right\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\theta^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

Od tod

$$\sigma^2 = \left\langle\theta^2\right\rangle - \langle\theta\rangle^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Verjetnost, da se pojavi let, daljši od $l = 2R$ ($\theta > 2 = \theta_0$)?

$$P = \int_{\theta_0}^{\pi}\rho(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0.29$$

Zdaj pa smo prešli na statistična vprašanja: od tu naprej potrebujemo samo verjetnost P in pozabimo na vse kar je bilo prej. Verjetnost, da v desetih poletih zgodi devet dogodkov z verjetnostjo P, je binomska:

$$Q = \binom{10}{9}P^9(1-P) = 1.09\cdot 10^{-4}$$

Dodatno vprašanje: porazdelitev takih dni v letu je spet binomska, pri kateri je $Z = 300$. Ker potrebujemo verjetnost za več kot $N = 100$ takih dni, potrebujemo vsoto, kar raje naredimo z integralom. Preidemo na Gaussov približek z istim povprečjem in disperzijo:

$$\langle N\rangle = ZQ$$

$$\sigma^2 = ZQ(1-Q)$$

Verjetnost je potem

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_N^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(N-\langle N\rangle)^2/\sigma^2}\,\mathrm{d}N$$

11 Kerševan::8

Razpadni čas kratkoživega stanja, ki traja približno 3 ms, določimo kot časovno razliko med signaloma, ki označujeta nastanek vzbujenega stanja in njegov razpad. Po programerski nerodnosti je čas drugega signala zaokrožen (navzgor) na celo mikrosekundo, tako da je izmerjeni čas povečan za zaokrožitveno napako, ki je slučajna in enakomerno porazdeljena v intervalu od 0 do 1 ms. Kakšna je verjetnostna gostota izmerjenih časov? Nastalo napako poskušamo računsko korigirati tako, da dodatni zaokrozitveni premik odštejemo. Ne moremo pa odpraviti povečane nezanesljivosti rezultata. Za koliko je statistična napaka korigiranega razpadnega časa, ki ga dobimo iz povprečja 100 izmerjenih časov, večja od statistične napake rezultata, ki bi ga dobili iz povprečja enakega števila neoporečnih izmerkov?

Porazdelitev bi bila

$$\rho(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

če bi bilo vse v redu ($\lambda = (3\,\mathrm{ms})^{-1}$). Po dodatku enakomerno porazdeljene zaokrožitvene napake pa je ta porazdelitev konvoluirana z enakomerno porazdelitvijo od 0 do 1 (vse merimo v milisekundah). Pri konvoluciji moramo paziti spet na definicijska območja. Enakomerna porazdelitev je definirana v $(0, 1)$, eksponentna pa v $(0, \infty)$. Zapišimo najprej brez mej:

$$\rho'(t) = \int \rho(t-\tau) 1(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Definicijsko območje ρ forsira $t - \tau > 0$, se pravi $\tau < t$. Definicijsko območje druge funkcije pa seveda forsira $0 < \tau < 1$. Torej:

$$\rho'(t) = \begin{cases} \int_0^t \rho(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau & t < 1 \\ \int_0^1 \rho(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau & t > 1 \end{cases}$$

$$\rho'(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t < 1 \\ (e^{\lambda} - 1) e^{-\lambda t} & t > 1 \end{cases}$$

Če hočemo korigirati, bomo odštevali 0.5. Zdaj pa potrebujemo disperzijo obeh porazdelitev (odštevanje ne bo vplivalo na disperzijo, zato jo raje računajmo za nepremaknjen ρ').

Lahko bi računali integrale za $\langle t^2 \rangle$ in $\langle t \rangle$ za zgornjo porazdelitev. Vendar to ni potrebno: pri konvoluciji se disperzije seštevajo. Za enakomerno porazdelitev od 0 do 1 vemo, da velja

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}$$

Za navadno eksponentno porazdelitev je pa $\langle t \rangle = \lambda^{-1}$, $\langle t^2 \rangle = 2\lambda^{-2}$ in zato $\sigma_0^2 = \lambda^{-2}$. Nova disperzija je torej

$$\sigma'^2 = \frac{1}{12} + \lambda^{-2}$$

Po 100 meritvah uporabimo dejstvo, da se σ^2 po N meritvah deli z N. Torej:

$${\sigma'_N}^2 = \frac{\sigma'^2}{N} = \frac{1}{12N} + \underbrace{\frac{\sigma_0^2}{N}}_{\sigma_{0N}^2}$$

Zato, da dobimo razliko $\sigma'_N - \sigma_{0N}$, lahko vstavimo številke, lahko pa še malo premečemo rezultat:

$$\sigma'_N - \sigma_{0N} = \frac{1}{12N(\sigma'_N + \sigma_{0N})}$$

V imenovalcu verjetno lahko privzamemo, da je razlika majhna in novo sigmo aproksimiramo s staro:

$$\sigma'_N - \sigma_{0N} = \frac{\lambda}{24N} = 1.39 \cdot 10^{-4}$$

(vstavili smo $N = 100$ in $\lambda = 3^{-1}$ - enote niso narobe - formalno ima $\frac{1}{12}$ enote ms^{-2}, ker je to disperzija enakomerne porazdelitve)

12 Kerševan::15

Obiralec jabolk stoji na lestvi in obira jabolka. Porazdelitev jabolk po masah je enakomerna na intervalu od 100 g do 200 g. Z vsako roko odtrga po eno, nato pa večje od obeh jabolk spravi v levo košaro, manjše pa v desno. Za koliko se razlikujeta povprečni masi jabolk v levi in desni košari? Košari sta polni, ko vsebuje vsaka 100 jabolk: kolikšna je verjetnost, da bodo jabolka v levi košari skupno za več kot 1 kg težja od jabolk v desni košari?

Najprej se zmenimo, da štejemo samo razlike v masah (polne mase nikjer ne potrebujemo). Uvedimo nove spremeljivke, tako da bosta obe masi variirali od 0 do 1:

$$x = \frac{m_1 - 100\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}}, \quad y = \frac{m_2 - 100\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}}$$

Ker sta masi obeh jabolk porazdeljeni enakomerno, je porazdelitev po obeh jabolkih tudi enakomerna v enotskem kvadratu:

$$\int \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Spet smo se posluzili trika, da porazdelitve pišemo v integralih, da s tem nosimo še informacijo o definicijskem območju.

Zdaj potrebujemo povprečno *razliko* mas - ker vedno sortiramo jabolka, bo razlika vedno pozitivna, se pravi $|x-y|$.

$$\langle |x-y| \rangle = \int_0^1 \int_0^1 |x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Integral je enostavno izračunati, ko ugotovimo, da se definicijsko območje razdeli po diagonali na dva dela, kjer je predznak $x-y$ različen, zaradi simetrije pa lahko upoštevamo kar dvojno vrednost enega. Poglejmo spodnji trikotnik:

$$\langle |x-y| \rangle = 2\int_0^1 \int_0^x (x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x^2 - x^2/2)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Povprečna razlika v masah je torej 33.3 g.

Za drugi del naloge bomo aproksimirali porazdelitev po $|x-y|$ z Gaussovo krivuljo, da bomo lahko integrirali od enega kilograma naprej. Za to potrebujemo disperzijo porazdelitve - tukaj bo pa kar lažje, če integriramo kar po celem območju, ker se absolutna vrednost absorbira v kvadrat in ne dela težav.

$$\left\langle |x-y|^2 \right\rangle = \int_0^1 \int_0^1 (x-y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (y^2 - y + \tfrac{1}{3})\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\sigma^2 = \left\langle |x-y|^2 \right\rangle - \langle |x-y| \rangle^2 = \frac{1}{18}$$

Verjetnost za razliko, večjo od kilograma, je sedaj le trivialen Gaussov integral, kot smo jih že več zapisali v prejšnjih nalogah.

13 Kerševan::19

S primernim računalniškim programom žrebamo slučajna števila, ki so porazdeljena enakomerno v intervalu $[-1, 1]$, in sproti računamo njihovo vsoto. Kolikšna je verjetnost, da ta vsota obrne predznak, ko prištejemo 100-to število?

Dobljena porazdelitev po 99 poskusih je tolikokratna konvolucija osnovne porazdelitve - zaradi centralnega limitnega izreka bo ta stvar praktično Gaussova. Porazdelitev je centrirana, disperzija je pa N-kratnik prvotne disperzije, ki je

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Zdaj moramo ugotoviti, katera števila in s kakšno verjetnostjo, menjajo predznak. Glejmo samo pozitivna števila (celotna verjetnost bo potem dvakrat večja). Pozitivno število x bo menjalo predznak, če je naslednjo žrebano število med -1 in $-x$, torej z verjetnostjo $\frac{1-x}{2}$. Števila nad 1 ne bodo menjala predznaka. Rešitev je torej

$$P = 2\int_0^1 \frac{1-x}{2}\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Pri tem je

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}x^2/N\sigma^2}; \quad N = 99; \quad \sigma^2 = \frac{1}{3}$$

14 Merševan::23

S kolikšno verjetnostjo lahko iz treh na slepo izbranih palic, katerih dolžine so enakomerno porazdeljene v danem intervalu, sestavim trikotnik?

Porazdelitev je v prostoru stranic a, b, c kocka v prvem oktantu. Pogoji sledijo iz trikotniškega pravila v vseh treh smereh:

$$a + b - c > 0 \quad a - b + c > 0 \quad -a + b + c > 0$$

To so tri ravnine skozi izhodišče, s katerimi obsekamo kocko v kateri so možne izbire kombinacij stranic. Verjetnost, da lahko sestavimo trikotnik, je enaka deležu kocke, ki ostane po sekanju.

Z malo truda si skiciramo, da bi kocko, ki bi segla v izhodišče, obsekali tako, da bi odvzeli tri tristrane piramide (s pravimi koti v vrhu), s stranico kraka enako stranici kocke. V običajno označeni kocki rezi potekajo preko AFH, ACF in AHC. Volumen ene take piramide (recimo $AFHE$) je $\frac{1}{6}$, verjetnost, ki ostane je torej $\frac{1}{2}$.

V primeru, ko kocka ne sega do koordinatnega izhodisca (v našem primeru gredo vse koordinate šele od 10 cm naprej), pa imajo odsekane piramide manjšo stranico. Če je razmerje med najmanjšo in največjo možno koordinato x, potem lahko skiciramo zgornjo ploskev kocke ($EFGH$), ki bi bila do izhodišča, v njej skiciramo stranico kocke, ki seže le od x naprej in ugotovimo, da je krak odsekane piramide $1 - 2x$. Preostali volumen je zato

$$P = 1 - \frac{3}{6}(1-2x)^3 = 1 - \tfrac{1}{2}(1-2x)^3$$

Pri nas je $x = \frac{1}{3}$ in s tem $P = \frac{53}{54}$.

15 Kerševan::25

Na velik list papirja narišem dve družini premic, vzporednih z robovi, torej pravokotnih med seboj. Razdalje med sosedami v vsakem snopu so porazdeljene enakomerno med 0 in a. Potem list po teh črtah razrežemo in določimo verjetnostno gostoto nastalih pravokotnikov po njihovih dolžinah. Kolikšna je povprečna ploščina in kolikšen je njen efektivni odmik? Kolikšna je veretnost, da ima naključno izbrani pravokotnik ploščino večjo od $0.75a^2$? Ali znaš konstruirati tudi verjetnostno porazdelitev po ploščinah?

Zabavno dejstvo: ta naloga je ekvivalentna nalogi, označeni v tem dokumentu pod številko 3.

Funkcije, ki ohranjajo obliko po konvoluciji

Centralni limitni izrek pravi, da Gaussova funkcija ohranja obliko po konvoluciji same s seboj. Kaj to pomeni? Najprej se dogovorimo, da govorimo o centriranih porazdelitvah. Vemo, da je Fourierova transformiranka konvolucije produkt transformirank prvotnih funkcij. Če konvoluiramo funkcijo samo s seboj, velja

$$F(\omega)^n = F(k\omega)$$

Upoštevali smo, da je $F(0) = 1$, ker je ničta komponenta Fourierovega razvoja kar integral funkcije - porazdelitve so pa normirane. Po drugi strani pa se širina porazdelitve lahko spreminja (zato faktor k). Predpostavimo neko potenčno odvisnost k od n:

$$F(\omega)^n = F(n^a\omega)$$

Če hočemo tako funkcijo poiskati, moramo dobiti neke vrste diferencialno enačbo. Odvajajmo izraz po n.

$$\ln F(\omega)F(\omega)^n = F'(n^a\omega)\omega a n^{a-1}$$

Vstavimo $n = 1$:

$$F \ln F = \omega a F'$$

Separacija spremeljivk:

$$\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = \int \frac{\mathrm{d}F}{F\ln F}$$

$$\frac{1}{a}\ln\omega = \ln\ln F$$

$$F = e^{A|\omega|^{1/a}}$$

Za $a = \frac{1}{2}$ dobimo Gaussovo funkcijo - to je znani rezultat: Fourierova transformiranka Gaussove funkcije je tudi Gaussova funkcija, $a = \frac{1}{2}$ pa pove, da pri konvoluciji velja $\sigma \to \sqrt{n}\sigma$.

Za $a = 1$ dobimo eksponentno funkcijo, ki je Fourierova transformiranka Lorentzove funkcije:

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

Tej se širina spreminja linearno s številom konvolucij.

Za splošen a dobimo celo družino funkcij, ki ohranjajo svojo obliko pri konvoluciji. Za majhne a transformiranki F pripadajoča porazdelitev dobi negativna področja. F postaja vedno bolj podobna pravokotni funkciji, ki je transformiranka funkcije $\frac{\sin x}{x}$, ki očitno ni nenegativna.

Za $a > 1$ ima F nezvezen odvod v ničli - pripadajoča porazdelitev pa ima zato neskončno disperzijo (disperzija je sorazmerna z drugim odvodom transformiranke v ničli). Za vsak necel $1/a$ velja, da neki odvod F postane nezvezen in je ustrezni moment neskončen.