6. naloga: Enačbe hoda

Za opis najpreprostejših fizikalnih procesov uporabljamo navadne diferencialne enačbe, ki povezujejo vrednosti spremenljivk sistema z njihovimi časovnimi spremembami. Tak primer je (nelinearna) Bernoullijeva enačba

$$y' + y^3 = \frac{y}{a+x}\,, \qquad x > 0\,,$$

(x pomeni "čas"). Enačbam, ki opisujejo razvoj spremenljivk sistema y po času ali drugi neodvisni spremenljivki x, pravimo *enačbe hoda*. Pri tej nalogi bomo proučili uporabnost različnih numeričnih metod za reševanje enačbe hoda oblike $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x,y)$, kamor sodi tudi zgoraj zapisana Bernoullijeva enačba,

$$y' = f(x,y) = -y^3 + \frac{y}{a+x}\,.$$

Najbolj groba prva inačica, osnovna Eulerjeva metoda, je le prepisana aproksimacija za prvi odvod $y' \approx (y(x+h) - y(x))/h$, torej

$$y(x+h) = y(x) + h\,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_x\,. \tag{1}$$

Diferencialno enačbo smo prepisali v diferenčno: sistem spremljamo v ekvidistantnih korakih dolžine h. Metoda je večinoma stabilna (kdaj in kako, preveriš med vajo), le groba je: za večjo natančnost moramo ustrezno zmanjšati korak. Za red boljša ($\mathcal{O}(h^3)$) je simetrizirana Eulerjeva (ali sredinska) formula, ki sledi iz simetriziranega približka za prvi odvod, $y' \approx (y(x+h) - y(x-h))/2h$. Računamo po shemi

$$y(x+h) = y(x-h) + 2h\,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_x\,, \tag{2}$$

ki pa je praviloma nestabilna. Obstaja še izboljšava Eulerjeve metode

$$y(x+h) = y(x) + h\,f\left(x + h/2, y(x) + \frac{h}{2}\,f\left(x, y(x)\right)\right)\,, \tag{3}$$

ki je prav tako drugega reda ($\mathcal{O}(h^3)$). Želeli bi si pravzaprav nekaj takega:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}\left[\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_x + \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x+h}\right] \tag{4}$$

(trapezna metoda), le da to pot ne poznamo odvoda v končni točki intervala. Shema je implicitna: v vsakem koraku si pomagamo z iteracijo. Preprosta predstavnica implicitnih metod je tudi implicitna Eulerjeva metoda

$$y(x+h) = y(x) + h\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x+h}\,. \tag{5}$$

V praksi zahtevamo natančnost in numerično učinkovitost, ki sta neprimerno boljši kot pri opisanih preprostih metodah. Uporabimo metode, zasnovane na algoritmih prediktor-korektor, metode višjih redov iz družine Runge-Kutta, ali ekstrapolacijske metode. Brez dvoma ena najbolj priljubljenih, četudi še zdaleč ne najnatančnejših, je metoda RK4,

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x,\, y(x)\right)\ , \\
k_2 &= hf\left(x+\frac{1}{2}h,\, y(x)+\frac{1}{2}k_1\right)\ , \\
k_3 &= hf\left(x+\frac{1}{2}h,\, y(x)+\frac{1}{2}k_2\right)\ , \\
k_4 &= hf\left(x+h,\, y(x)+k_3\right)\ , \\
y(x+h) &= y(x)+\frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)+\mathcal{O}(h^5)\ .
\end{aligned} \tag{6}$$

Naloga: Bernoullijevo enačbo reši z metodo (1) in z vsaj še katero od omenjenih boljših (2), (3), (4) ali (5), kakor tudi (6), z začetnim pogojem $y(0) = 1$. Uporabi $a = 0.01$ in spremljaj rešitev na intervalu $0 \leq x \leq 3$ v $N = 80$ korakih ($h = 3/80$). Ponovi vajo pri $N = 20$, $N = 40$ in $N = 160$. Kakšne razlike med metodami opaziš? Spremljaj tudi maksimalno napako rešitve (v posameznih točkah ali v kaki ustrezni normi) v odvisnosti od N pri vsaki od izbranih metod: uporabi čim večji razpon N. Primerjaj metode med seboj! Analitična rešitev Bernoullijeve enačbe je

$$y(x) = \frac{a+x}{\sqrt{\beta+\frac{2}{3}(a+x)^3}}\ .$$

Dodatna naloga: Sprogramirjate algoritem, ki za izbrano metodo med integracijo dinamično prilagaja dolžino koraka h tako, da je lokalna napaka rešitve manjša od neke predpisane natančnosti, recimo $\varepsilon \leq 10^{-8}$. Pomagaš si lahko na primer z metodo lokalne ekstrapolacije, opisano v knjigi Numerical Recipes v poglavju 16.2.