4. naloga: Fourierova analiza

Pri numeričnem izračunavanju Fourierove transformacije

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i f t)\, dt \tag{1}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi i f t)\, df \tag{2}$$

je funkcija $h(t)$ običajno predstavljena s tablico diskretnih vrednosti

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots N-1. \tag{3}$$

Pravimo, da smo funkcijo vzorčili z vzorčno gostoto $1/\Delta$. Za tako definiran vzorec obstaja naravna meja frekvenčnega spektra, ki se imenuje *Nyquistova frekvenca*, $f_c = 1/(2\Delta)$: harmonični val s to frekvenco ima v vzorčni gostoti ravno dva vzorca v periodi. Če ima funkcija $h(t)$ frekvenčni spekter omejen na interval $[-f_c, f_c]$, potem ji z vzorčenjem nismo odvzeli nič informacije, kadar pa se spekter razteza izven intervala, pride do *potujitve* (*aliasing*), ko se zunanji del spektra preslika v interval.

Frekvenčni spekter vzorčene funkcije (3) računamo samo v N točkah, če hočemo, da se ohrani količina informacije. Vpeljemo vsoto

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(2\pi i k n/N), \qquad n = -N/2, \ldots, N/2, \tag{4}$$

ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija in je povezana s funkcijo v (1) takole:

$$H(n/(N\Delta)) \approx \Delta \cdot H_n.$$

Zaradi potujitve, po kateri je $H_{-n} = H_{N-n}$, lahko pustimo indeks n v enačbi (4) teči tudi od 0 do N. Spodnja polovica tako definiranega spektra ($1 \leq n \leq N/2 - 1$) ustreza pozitivnim frekvencam $0 < f < f_c$, gornja polovica ($N/2 + 1 \leq N - 1$) pa negativnim, $-f_c < f < 0$. Posebna vrednost pri $n = 0$ ustreza frekvenci nič ("istosmerna komponenta"), vrednost pri $n = N$ pa ustreza tako f_c kot $-f_c$.

Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih. Posebej zanimivi so trije primeri:

Če je	h_k realna	tedaj je	$H_{N-n} = H_n^*$
	h_k realna in soda		H_n realna in soda
	h_k realna in liha		H_n imaginarna in liha

(ostalih ni težko izpeljati). V tesni zvezi s frekvenčnim spektrom je tudi moč. *Celotna moč* nekega signala je neodvisna od reprezentacije, Parsevalova enačba pove

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2$$

(lahko preveriš). Pogosto pa nas bolj zanima, koliko moči je vsebovane v frekvenčni komponenti med f in $f + df$, zato definiramo enostransko spektralno gostoto moči (*one-sided power spectral density*, PSD)

$$P_n = |H_n|^2 + |H_{N-n}|^2 \; .$$

Pozor: s takšno definicijo v isti koš mečemo negativne in pozitivne frekvence, vendar sta pri realnih signalih h_k prispevka enaka, tako da je $P_n = 2\,|H_n|^2$.

Z obratno transformacijo lahko tudi rekonstruiramo h_k iz H_n

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp(-2\pi i k n / N) \tag{5}$$

(razlika glede na enačbo (4) je le predznak v argumentu eksponenta in utež $1/N$).

Naloga:

1. Izračunaj Fourierov obrat nekaj enostavnih vzorcev, npr. mešanic izbranih frekvenc. Ena izmed mešanic naj bo

   $$f(t) = \sin(\pi t) + 2\sin(2\pi t) + 3\cos(3\pi t) \; ,$$

   izmisli pa si še kako svojo. Primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen. Kaj se zgodi, če namesto zgornje mešanice uporabiš na primer

   $$f(t) = \sin(1.1\pi t) + 2\sin(2.2\pi t) + 3\cos(3.3\pi t) \; ?$$

   Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco. Napravi še obratno transformacijo (5) in preveri natančnost metode.

2. Napravi Fourierovo analizo signalov, ki jih dobiš pri vaji *Akustični resonator* pri Fizikalnem praktikumu II. Posnetke signalov ob trkih po resonatorju najdeš na spletni strani. Prvi štirje posnetki (`poskus[1-4]_akres_novi.dat.gz`) pripadajo različnim načinom izvedbe trkov in signalu, ki je bil posnet s predmetom, položenim v resonator. Zadnji trije posnetki (`poskus[1-3]_akres.txt.gz`) ustrezajo signalom ob bolj previdno odmerjenih udarcih.

3. Po Fourieru analiziraj zapise sklepnega akorda Bachove Tokate in Fuge v d-molu (BWV565), ki jih najdeš na spletni strani Matematičnofizikalnega praktikuma. Signal je bil vzorčen pri 44100 Hz, 11025 Hz, 5512 Hz, 2756 Hz, 1378 Hz in 882 Hz. S poslušanjem zapisov v formatu `.mp3` ugotovi, kaj se dogaja, ko se znižuje frekvenca vzorčenja, nato pa s Fourierovo analizo zapisov v formatu `.txt` to tudi prikaži.