5. naloga: Hitra Fourierova transformacija in korelacijske funkcije

Diskretno Fourierovo transformacijo (DFT) $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ je bijektivna preslikava med Evklidskima vektorskima prostoroma dimenzije N in jo definiramo kot

$$H = \mathcal{F}_N h \,, \qquad H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(2\pi \mathrm{i} kn/N) \,,$$

in njen inverz kot

$$h = \mathcal{F}_N^{-1} H \,, \qquad h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp(-2\pi \mathrm{i} kn/N) \,,$$

pri čemer sta vektorja $h = (h_k)_{k=0}^{N-1}$ in $H = (H_n)_{n=0}^{N-1}$. Transformacijo lahko z upoštevanjem lastnosti eksponente funkcije $e^{x+y} = e^x e^y$ prepišemo v

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk} h_k, \qquad W_N = \exp(2\pi \mathrm{i}/N) \,.$$

Izračun $\mathcal{F}_N h$ ima z enostavnim seštevanjem vsote časovno zahtevnost $O(N^2)$. Račun pa je mogoče izvesti z uporabo Cooley-Tukeyjevega algoritma (1965) z bistveno manj operacijami. Predpostavimo, da je N deljiv z m. Tedaj lahko vsoto razdelimo na m delov, ki vsaka teče po elementih vektorja h_k z enakim modulom indeksa $i \mod m$:

$$H_n = \sum_{l=0}^{m-1} W_N^{nl} \sum_{k=0}^{N/m-1} W_{N/m}^{nk} h_{mk+l}$$

Označimo z $h^{(l)} = (h_{mk+l})_{k=0}^{N/m-1}$ komponente h, ki imajo enak modul indeksa glede na m. Z enostavnim premislekom opazimo, da smo DFT vektorja h dimenzije N prepisali na vsoto m DFT vektorjev $h^{(i)}$ dimenzije N/m. Slednje simbolično zapišemo kot

$$(\mathcal{F}_N h)_n = \sum_{l=0}^{m-1} W_N^{nl} (\mathcal{F}_{N/m} h^{(l)}))_n \,,$$

kjer z $(\cdot)_n$ označimo komponento vektorja. V primeru, da znamo faktorizirati N, lahko zgornjo relacijo razumemo kot rekurzivno formulo za izračun DFT celotnega vektorja, ki sledi ideji algoritmov imenovani *deli in vladaj*: delimo vzorec, za katerega želimo izračunati DFT, in si s tem zmanjšamo količino dela. Optimalni primer je $N = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$), kjer na vsakem koraku delimo vektor na sode in lihe indekse. Za izračun vseh komponent DFT potem porabimo $O(N \log_2 N)$ operacij. Podobno odvisnost dobimo, če je mogoče N faktorizirati na dovolj majhna praštevila. Modernejši numerični paketi podpirajo faktorizacijo

$$N = 2^{p_1} 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \,, \qquad p_i \in \mathbb{N} \,, s$$

pri čemer spet dobimo časovno zahtevnost $O(N \log N)$. Implementacija hitre DFT (oziroma FFT – fast Fourier transform) je lahko precej zapletena, saj morajo poskrbeti za čim hitrejšo naslavljanje elementov v vektorju glede na modul faktorjev, glej npr. [1].

V matematični analizi je korelacija oz. korelacijska funkcija definirana kot transformacija, ki sprejme kot parameter dve kompleksni funkciji g in h in vrne eno

$$C(g,h)(\tau) = \int \mathrm{d}x\, g(x+\tau)\, h(x)^* \,.$$

Zapisana definicija je v praksi večkrat preveč omejena in zato uporabljamo rajši

$$C(g,h)(\tau) = \langle g(x+\tau)\, h(x)^* \rangle_x \,, \qquad \langle F(x) \rangle_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}x F(x) \,,$$

kjer operacijo $\langle \cdot \rangle$ imenujemo časovno povprečje. V grobem je slednja korelacija definirana za vse funkcije s končnim povprečjem in povprečjem kvadrata, kar sta v praksi dobro razumljiva pojma. Diskretna varianta korelacije, ki sprejme vektorja $g = (g_i)_{i=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$ in $h = (h_i)_{i=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$ in vrne enega, je definirana z

$$C(g,h)_n = \langle g_{k+n}\, h_k^* \rangle_k \,, \qquad n = 0, \ldots, N-1 \,,$$

kjer implicitno privzamemo periodične robne pogoje $g_{i+N} = g_i$ in $h_{i+N} = h_i$. Časovno povprečje $\langle \cdot \rangle$ je definirano kot

$$\langle F_k \rangle_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \,,$$

Enastavno se lahko prepričamo, da ima korelacija simetrijo $C(g,h)_k = C(h,g)_{N-k}^*$. Indeks, po katerem povprečimo, je večkrat spuščen, če je le-ta očiten. Omejimo se sedaj le na direktno varianto, ki je zelo elegantno povezana z DFT. Imejmo vektorja $g, h \in \mathbb{C}$ in tvorimo matematično korelacijo njihovih komponent

$$c_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_{k+n}\, h_k^* \,,$$

kjer so privzeti periodični robni pogoji, in velja zveza

$$(\mathcal{F}_N c)_n = (\mathcal{F}_N g)_n (\mathcal{F}_N h)_n^* \,.$$

Predstavljena enakost uporabljamo za pohitren izračun korelacij

$$C(g,h) = \mathcal{F}_N^{-1} \left[((\mathcal{F}_N g)_n\, (\mathcal{F}_N h)_n^*)_{n=0}^{N-1} \right] \,. \tag{1}$$

ki tako namesto $O(N^2)$ stane le $O(N \log N)$ operacij. Korelacija je prekrivalni integral dveh časovno zamaknjenih skalarnih funkcij. Točka velike korelacije pomeni, da sta funkciji med seboj podobni z nekim časovnim zamikom.

V primeru, da sta funkciji oz. vektorja v korelaciji enaki, govorimo o *avtokorelacijski funkciji* in jo označimo z $C(h) := C(h,h)$. Slednja je simetrična, $C(h)_k = C_(h)_{N-k}$, in predstavlja mero, koliko je signal z nekim časovnim zamikom sebi podoben. Iz lokalnih maksimumov v avtokorelacijski funkciji sklepamo na periodičnosti, bodisi popolne ali približne. Pri periodičnih signalih je tudi avtokorelacijska funkcija striktno periodična oz. vsaj po naivnem razmisleku bi naj bila. Še bolj pa nas zanimajo signali, ki so slabo sebi-korelirani in avtokorelacija $C(\tau)$ s časom relaksira k $\langle h\rangle^2$. V primeru hitre relaksacije je bolj smiselno opazovati reskalirano obliko avtokorelacije

$$\widetilde{C}(h)_n = \frac{C(h)_n - \langle h\rangle^2}{C(h)_0 - \langle h\rangle^2} \,,$$

kjer je imenovalec ocena standardne deviacije signala

$$\sigma^2 = C(h)_0 - \langle h\rangle = \left\langle (h_k - \langle h\rangle)^2 \right\rangle_k \,.$$

V naravoslovnih aplikacijah korelacija razumemo kot mero povezansti med točkami in zato privzeta periodičnost signala oz. podatkov v realnih aplikacija v večkrat ni upravičljiva. Patologija prejšnje definicije je najbolje vidna na primeru ne-periodično zaključih vzorcev v splošnem periodičnih funkcij. Zato je pravilnejša ali uporabnejša definicija korelacije med podatki v vektorjih h in g naslednja

$$C(g,h)_n = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n-1} g_{k+n}\, h_k^* \,,$$

kjer v vsoti variira število členov. Podobno za avtokorelacijo uporabljamo normalizirano formulo

$$\begin{aligned} C(h,h)_n &= \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n-1} \frac{(h_k - \langle h\rangle)(h_{k+n} - \langle h\rangle)}{\sigma^2} \,, \\ \langle h\rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k \,, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (h_k - \langle h\rangle)^2 \,. \end{aligned}$$

Izračun teh (avto)korelacij lahko prav tako izvedemo na hitrejši način, če razširimo vektorja $g, h \in \mathbb{C}^N$ v $C(g,h)$ z ničlami na dvakratno dimenzijo

$$\tilde{g} = (g_0, \ldots, g_{N-1}, 0, \ldots, 0) \,, \quad \tilde{h} = (h_0, \ldots, h_{N-1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{2N} \,,$$

in korelacijo zapišemo kot vsoto s fiksnim številom členov

$$C(g,h)_n = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{2N-1} \tilde{g}_{k+n}\, \tilde{h}_k^* \qquad (2)$$

in jo nato z uporabo DFT izračunamo na hiter način kot v primeru (1).

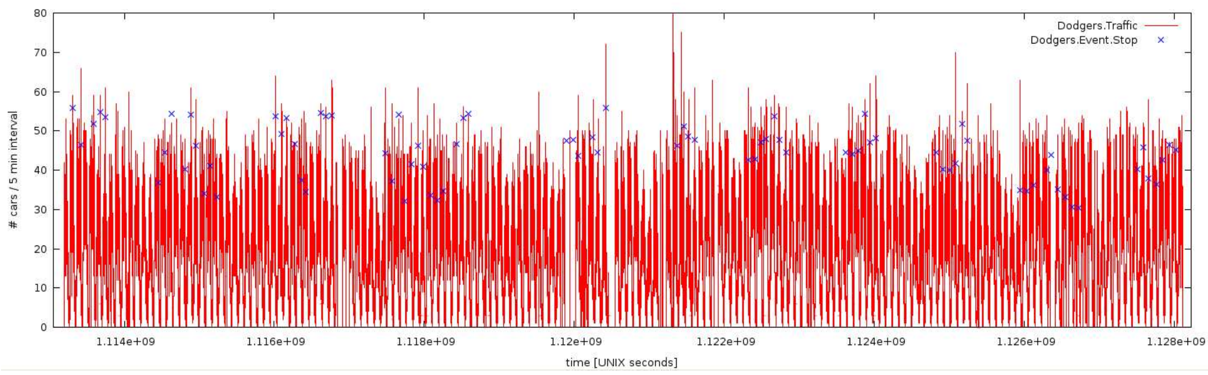
Naloga: Na spletni strani MF praktikuma najdeš datoteko `synthetic.5`, ki vsebuje psevdo-naključno generirane podatke, ki so videti lepo periodični, vendar se vzorci v njih nikoli strogo ne ponovijo. (Izbereš lahko tudi posnetek zvoka, ki je bil posnet pri vretju vode `voda.dat.gz`.) Napravi hitro Fourierovo analizo tega signala in izračunaj avtokorelacijsko funkcijo. V primeru hitrega pojemanja korelacije le-te prikažite v reskalirani obliki in logaritemski skali. Če opazite eksponentni trend upadanja oblike

$$|C_n| \sim Ce^{-t/\tau}\,, \qquad C = \text{konst} > 0,$$

ocenite se korelacijsko dolžino τ, ki predstavlja efektivno dolžino na katerem je signal statistično odvisen.

Naloga: Na spletni strani je tudi nekaj posnetkov oglašanja velike uharice, naše največje sove. Posneti sta dve sovi z minimalnim ozadjem (`bubomono` in `bubo2mono`) in nekaj mešanih signalov, ki zakrivajo njuno oglašanje (`mix`, `mix1`, `mix2` in `mix22`). V signalih `mix2` in `mix22` je oglašanje sove komaj še zaznavno. Določi frekvenčni spekter sovjega oglašanja v vseh posnetkih ter korelacijske (ali avtokorelacijske) funkcije med posameznimi posnetki ter pokaži, za katero sovo gre pri najbolj zašumljenih signalih!

Dodatna naloga: Analiziraj še časovni zapis gostote prometa avtomobilov na eni stezi avtocestne cestninske postaje blizu stadiona Dodgers v Los Angelesu, posnetim v približno 25 tednih v intervalih po 5 minut. Krivulja na spodnji sliki prikazuje število avtomobilov na petminutni interval (časovna os je merjena v sekundah), abscise točk blizu posameznih vrhov krivulje označujejo čase konca prireditev na stadionu, ob katerih pričakujemo povečanje prometa, ordinate točk pa so sorazmerne s številom obiskovalcev, preštetim na stadionu med prireditvijo. Preglej frekvenčni spekter obeh signalov in njuno korelacijo in avtokorelacijo.



Slika 1: Pretok vozil skozi stezo cestninske postaje blizu stadiona Dodgers v Los Angelesu v odvisnosti od časa. Vzorčevalni interval je $\Delta = 300\,\mathrm{s}$.

Literatura

[1] M. Frigo, S. G. Johnson, *The Design and Implementation of FFTW3*, Proc. IEEE **93** No. 2 (2005) 216.