

## 1. Izračun Gaussovega integrala

Gaussovo verjetnostno porazdelitev

$$w(x_0, \sigma, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

srečamo v verjetnostnem računu in statistiki zelo pogosto. Običajno potrebujemo verjetnost nad intervalom, ki se izraža z Gaussovim integralom. Uporabili bomo definicijo iz Abramowitza

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt.$$

Pri ročnem delu si seveda pomagamo s tablicami, za računalnik pa si je treba pripraviti podprogram. Pregledali bomo naslednje možnosti [1]:

1. potenčna vrsta

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n! (2n+1)}, \quad \operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z);$$

2. asimptotska vrsta

$$z\sqrt{\pi} \exp(z^2) \operatorname{erfc}(z) \longrightarrow 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(-2z^2)^m};$$

3. racionalna aproksimacija ( $z > 0$ )

$$\operatorname{erf}(z) = 1 - (at + bt^2 + ct^3 + dt^4 + et^5) \exp(-z^2) + \varepsilon(z),$$

$$t = \frac{1}{1 + pz}, \quad \varepsilon(z) < 1.5 \cdot 10^{-7},$$

$$\begin{aligned} p &= .3275911, & a &= .254829592, & b &= -.284496736, \\ c &= 1.421413741, & d &= -1.453152027, & e &= 1.061405429. \end{aligned}$$

*Naloga:* Primerjaj metode po uporabnosti! Če je mogoče, primerjaj tudi potrebne čase! Opazuj konvergenco asimptotske vrste!

Napravi primerjalno tablico  $\operatorname{erf}(x)$ ,  $x = 0(0.2)3$  in  $\operatorname{erfc}(x)$ ,  $x = 3(0.5)8$  in pripravi podprogram za izračun  $\operatorname{erf}$  za poljubne vrednosti (lahko kombiniraš različne metode)!

Ali je numerična integracija primerljiva z izbrano metodo? Ugotovi, kolikšen interval bi moral uporabiti pri Simpsonovi integraciji!

*Dodatna naloga:* Sestavi algoritem za funkcijo, inverzno k  $\operatorname{erf}(z)$ ! Če imamo učinkovit algoritem za računanje monotone funkcije, je mogoče obratno funkcijo poiskati z bisekcijo ali podobnim postopkom.

## Literatura

- [1] Abramowitz M, Stegun I A (eds.) *Handbook of mathematical functions* (10ed., National Bureau of Standard, 1972)