7. naloga: Newtonov zakon

Gibanje masne točke v polju sil v eni dimenziji opišemo z diferencialno enačbo drugega reda, z Newtonovim zakonom

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F\;.$$

Enačba je seveda enakovredna sistemu enačb prvega reda

$$m\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p\;, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F$$

in tako jo tudi rešujemo: kot sistem dveh enačb prvega reda. Kadar sila F ni odvisna od hitrosti, na primer pri matematičnem (sinusnem) nihalu

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\sin x\;,$$

obstaja za ta sistem poleg standardnih metod (Runge-Kutta) tudi posebna trapezna shema, ki je presenetljivo točna in periodično stabilna

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + h\,u\left(t+\frac{1}{2}h\right)\;, \\ u\left(t+\frac{1}{2}h\right) &= u\left(t-\frac{1}{2}h\right) + h\,\frac{F(x(t),t)}{m}\;. \end{aligned}$$

Pomožna spremenljivka u je le slaba aproksimacija za hitrost, še najbliže ji je v vmesnih točkah ($h/2$), zato jo tja tudi pripisujemo. V resnici je u zgolj prva diferenca x. Sistemu je mogoče še zvišati red od $\mathcal{O}\left(h^3\right)$ na $\mathcal{O}\left(h^5\right)$, če členu F/m dodamo še $1/12$ njegove druge diference

$$\frac{F\left(x(t),t\right)}{m} \longrightarrow \frac{F\left(x(t),t\right)}{m} + \frac{F\left(x(t+h),t+h\right) - 2F\left(x(t),t\right) + F\left(x(t-h),t-h\right)}{12\,m}\;.$$

Shema sedaj ni več eksplicitna, pomagamo si z iteracijo, tako da drugo diferenco najprej ocenimo, nato pa zares izračunamo. (Z izbiro enote za čas smo postavili $\omega = 1$, kar pomeni, da je za majhne amplitude nihajni čas 2π.)

Naloga: Gornji shemi in metodo Runge-Kutta (po možnosti uporabi verzijo s prilagodljivo velikostjo koraka) primerjaj za nihanje matematičnega nihala z začetnim pogojem $x(0) = 1$, $v(0) = 0$. Poišči korak, ki zadošča za natančnost na 3 mesta. Primerjaj tudi periodično stabilnost shem: pusti, naj teče račun čez 10 ali 20 nihajev in poglej, kako se amplitude nihajev sistematično kvarijo. Pomagaš si lahko tudi tako, da občasno izračunaš energijo $E = 1 - \cos x + \frac{1}{2}(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)^2$. Opozorilo: diferenčni shemi bosta tekli z dosegljivo natančnostjo, če poskrbiš, da bo tudi začetni korak $u(h/2)$ izračunan v tolikšnem redu, kot ga doseže metoda. Z analitično rešitvijo dobimo za nihajni čas $4K(\sin\frac{1}{2}x(0))$, kjer je $K(u)$ popolni eliptični integral prve vrste: $K(\sin 0.5) = 1.67499$.

Dodatna naloga: Razišči še resonančno krivuljo vzbujenega dušenega matematičnega nihala

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \sin x = v\cos\omega_0 t,$$

kjer je β koeficient dušenja, v in ω_0 pa amplituda in frekvenca vzbujanja. Opazuj obnašanje odklonov in hitrosti nihala pri dušenju $\beta = 0.5$, vzbujevalni frekvenci $\omega_0 = 2/3$ in amplitudo vzbujanja na območju $0.5 < v < 1.5$. Diferenčna shema za u je implicitna in je lahko sitna; pomagaš si lahko z iteracijo ali pa rešuješ celotno enačbo na primer z metodo Runge-Kutta. Poskusi opaziti histerezno obnašanje resonančne krivulje pri velikih amplitudah vzbujanja (Landau, Lifšic, CTP, Vol. 1, *Mechanics*).

Dodatna dodatna naloga: Če ti gre delo dobro od rok, si oglej še odmike in hitrosti (fazne portrete) van der Polovega oscilatorja

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(1 - x^2\right) + x = v\cos\omega_0 t$$

s parametri $\omega_0 = 1$, $v = 10$ ter $\lambda = 1$ ali 100. Tu se ne trudi s preprostimi diferenčnimi shemami: problem je nelinearen in tog, zato uporabi neko preverjeno metodo (na primer iz družine Runge-Kutta ali ekstrapolacijsko metodo) s prilagajanjem velikosti koraka.