12. naloga — Reševanje PDE z metodo Galerkina

V 11. nalogi smo izračunali koeficient pretoka viskozne tekočine pod vplivom stalnega tlačnega gradienta po dolgi ravni cevi s polkrožnim presekom. V brezdimenzijskih spremenljivkah smo formulirali problem kot Poissonovo enačbo $\nabla^2 u(x,\varphi) = -1$ z robnimi pogoji $u(x=1,\varphi) = u(x,0) = u(x,\pi) = 0$. Koeficient pretoka smo nato izrazili v obliki

$$C = 8\pi \iint \frac{u(x,\varphi)\, x\, dx\, d\varphi}{(\pi/2)^2}\,,$$

kjer smo $u(x,\varphi)$ razvili po lastnih funkcijah za polkrog. Da bi se izognili računanju Besselovih funkcij in njihovih ničel, ki jih potrebujemo v razvoju, lahko zapišemo aproksimativno rešitev kot linearno kombinacijo nekih poskusnih (*trial*) funkcij

$$\tilde{u}(x,\varphi) = \sum_i a_i \Phi_i, \qquad i = 1,2,\ldots,N\,, \tag{1}$$

za katere ni nujno, da so ortogonalne, pač pa naj zadoščajo robnim pogojem, tako da jim bo avtomatično zadoščala tudi vsota (1). Približna funkcija $\tilde{u}$ seveda ne zadosti Poissonovi enačbi: preostane majhna napaka ε

$$\nabla^2 \tilde{u}(x,\varphi) + 1 = \varepsilon(x,\varphi)\,.$$

Pri metodi Galerkina zahtevamo, da je napaka ortogonalna na vse poskusne funkcije Φ_i,

$$(\varepsilon, \Phi_i) = 0\,, \qquad i = 1,2,\ldots,N\,.$$

(V splošnem bi lahko zahtevali tudi ortogonalnost ε na nek drug sistem utežnih (*weight*) oziroma testnih (*test*) funkcij Ψ_i. Metoda Galerkina je poseben primer takih metod (*Methods of Weighted Residuals*) z izbiro $\Phi_i = \Psi_i$.) Omenjena izbira vodi do sistema enačb za koeficiente a_i

$$\sum_i A_{ij} a_i = b_j\,, \qquad i = 1,2,\ldots,N\,, \tag{2}$$

$$A_{ij} = (\nabla^2 \Phi_i, \Phi_j)\,, \qquad b_j = (-1, \Phi_j)\,,$$

tako da je koeficient za pretok enak

$$C = -\frac{32}{\pi} \sum_{ij} b_i A_{ij}^{-1} b_j\,. \tag{3}$$

Za kotni del poskusne funkcije obdržimo eksaktne funkcije $\sin((2m+1)\varphi)$, Besselove funkcije za radialni del pa nadomestimo s preprostejšimi funkcijami $x^{2m+1}(1-x)^n$. Pozor: indeks i pomeni seveda dvojni indeks (šteje obenem m in n). Zaradi ortogonalnosti po m razpade matrika A v bloke, obrneš pa jo lahko s kako pripravljeno rutino, npr. s spodnjim in zgornjim trikotnim razcepom `ludcmp` in `lubksb` iz NRC.

Izračunaj koeficient C. V ta namen moraš dobiti matriko A in vektor b; preuči, kako je natančnost rezultata (vsote za koeficient C) odvisna od števila členov v indeksih m in n. Zaradi ortogonalnosti po m lahko oba učinka preučuješ neodvisno.

Dodatna naloga: V praksi je metoda Galerkina primerna v zapletenih geometrijah, ko grobe ocene dobimo že z eno samo (ali le nekaj) dobro izbranimi poskusnimi funkcijami, in ko še ni pretežko obrniti sistema (2). Če pa želimo uporabiti metodo izčrpneje, za večjo natančnost, si težko izmislimo dovolj bogat izbor funkcij Φ.

Da ima metoda Galerkina določene prednosti celo pred preprostimi diferenčnimi metodami, opazujmo še na primeru linearne hiperbolične valovne enačbe v eni dimenziji

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

za $x \in [0, 2\pi]$ s periodičnimi robnimi pogoji. Začetni pogoj naj bo $u(x, 0) = \sin(\pi \cos x)$; analitična rešitev enačbe je $u(x, t) = \sin(\pi \cos(x+t))$. Približno rešitev formalno razvijemo po poskusnih funkcijah

$$\widetilde{u}(x, t) = \sum_{j=-N/2}^{N/2} a_j(t)\Phi_j(x) \tag{4}$$

in po Galerkinu zahtevamo

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\right] \Psi_k(x)\, \mathrm{d}x = 0\,. \tag{5}$$

Najočitnejša izbira je $\Phi_j(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}$ in $\Psi_k(x) = (1/2\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$, tako da imamo obenem tudi ortogonalnost $\int_0^{2\pi} \Phi_j(x)\Psi_k(x)\mathrm{d}x = \delta_{jk}$. Funkcijo $u(x, t)$ seveda še iščemo: določi jo ravno Galerkinova zahteva (5), iz katere sledi sistem sklopljenih enačb za koeficiente $a_k(t)$

$$\frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}t} - \mathrm{i}k a_k = 0\,, \qquad k = -N/2, \ldots, N/2\,. \tag{6}$$

Začetni pogoj za ta sistem so vrednosti

$$a_k(0) = \int_0^{2\pi} u(x, 0)\Psi_k(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Za izračun $a_k(0)$ in časovni razvoj sistema enačb (6) uporabi kak preverjeni integrator, na primer RK4, in ob izbranih časih poišči rešitev (4). Za kontrolo imaš lahko koeficiente razvoja analitične rešitve, ki so

$$a_k(t) = \sin\!\left(\frac{k\pi}{2}\right) J_k(\pi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,.$$

(Za negativne indekse Besselovih funkcij uporabi zvezo $J_{-\nu} = \cos(\nu\pi)J_\nu - \sin(\nu\pi)Y_\nu$.) Primerjaj dobljeni rezultat s tistim, ki ga dobiš, če prvotno parcialno diferencialno enačbo diskretiziraš v prvem redu

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}$$

in to rešuješ v času naprej eksplicitno kot $u_{i+1,j} = u_{i,j} + (k/h)(u_{i,j+1} - u_{i,j})$.