11. naloga — Reševanje PDE z razvojem po lastnih funkcijah: Poisson

Če poznamo lastne funkcije diferencialnega operatorja za določeno geometrijo (iz Fizike II se spomni na primer na vodikov atom v sferični geometriji, kjer smo imeli $\widehat{L}^2 Y_{lm}(\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta,\phi)$ in $\widehat{L}_z Y_{lm}(\theta,\phi) = m\hbar Y_{lm}(\theta,\phi)$), se reševanje parcialnih diferencialnih enačb včasih lahko prevede na razvoj po lastnih funkcijah. V tej nalogi obravnavamo primer reševanja Poissonove enačbe na polkrogu, za katero zaradi značilnih robnih pogojev lastne funkcije poznamo. Če je geometrija bolj zapletena in zato lastnih funkcij vnaprej ne poznamo, si lahko pomagamo na primer z metodo Galerkina (naslednja naloga).

Pri opisu enakomernega laminarnega toka viskozne, nestisljive tekočine po dolgi ravni cevi pod vplivom stalnega tlačnega gradienta p' se Navier-Stokesova enačba poenostavi v Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 v = -\frac{p'}{\eta},$$

kjer je v vzdolžna komponenta hitrosti, odvisna samo od koordinat preseka cevi, η pa je viskoznost tekočine. Enačbo rešujemo v notranjosti preseka cevi, medtem ko je ob stenah hitrost tekočina enaka nič. Za pretok velja Poiseuillov zakon

$$\Phi = \int v\, dS = C\, \frac{p' S^2}{8\pi\eta}\,,$$

kjer je koeficient C odvisen samo od oblike preseka cevi ($C = 1$ za okroglo cev). Določili bomo koeficient za polkrožno cev z radijem R. V novih spremenljivkah $x = r/R$ in $u = v\eta/(p'R^2)$ se problem glasi

$$\nabla^2 u(x,\varphi) = -1\,, \qquad u(x=1,\varphi) = u(x,0) = u(x,\varphi=\pi) = 0\,,$$

$$C = 8\pi \iint \frac{u(x,\varphi)\, x\, dx\, d\varphi}{(\pi/2)^2}\,.$$

Konstanto 1 razvijemo v lastne funkcije polkroga

$$1 = \sum_{ms} A_{ms}\, g_{ms}(x,\varphi) = \sum_{ms} A_{ms}\, J_{2m+1}(y_{ms} x)\, \sin(2m+1)\varphi\,,$$

$$A_{ms} = \frac{(1, g_{ms})}{(g_{ms}, g_{ms})}\,, \qquad m = 0,1,2,\ldots\,, \qquad s = 1,2,\ldots\,.$$

y_{ms} je s-ta ničla $2m+1$-te Besselove funkcije. Rešitev se potem zapiše v obliki

$$u(x,\varphi) = \sum_{ms} \frac{A_{ms}\, g_{ms}(x,\varphi)}{y_{ms}^2}\,,$$

$$C = 8 \sum_{ms} \left[\frac{8}{\pi} \frac{I_{ms}}{(2m+1)\, y_{ms}\, J_{2m+2}(y_{ms})} \right]^2 .$$

V izrazu za C nastopa izraz I_{ms}, ki je enak

$$I_{ms} = \frac{2m+1}{2}\,(1, g_{ms}) = \int_0^1 x\, J_{2m+1}(y_{ms}x)\,dx = \frac{4(2m+1)}{y_{ms}} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{k\, J_{2k}(y_{ms})}{(4k^2-1)}.$$

Za take vrste obstaja razmeroma ugoden algoritem: Besselove funkcije računamo z rekurzijo

$$J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x}\,J_n(x) - J_{n+1}(x).$$

Začnemo z $J_{n+1} \to 0$ in $J_n \to \varepsilon$ pri dovolj velikem n (običajno zadošča $n \le x$) ter gradimo rekurzijo proti $n = 0$. Dobljene vrednosti renormaliziramo z vsoto

$$J_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}$$

(pri normiranih Besselovih funkcijah je ta vsota enaka 1). Ničle y_{ms} lahko iščemo z rekurzijo ob uporabi bisekcije ali kake podobne metode.

Dodatna naloga: Poskusi izračunati ustrezni koeficient C še za pretok skozi cev s pravokotnim profilom (stranici a in b). Zdaj rešuješ Poissonovo enačbo v kartezičnih koordinatah

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{p'}{\eta}\,.$$

Če postaviš izhodišče v sredino pravokotnika, lahko rešimo homogeno enačbo z nastavkom $v_{\mathrm{h}}(x,y) = d_n \cosh((2n-1)\pi x/b)\,\cos((2n-1)\pi y/b)$, partikularna rešitev pa je na primer

$$v_{\mathrm{p}}(y) = \frac{p'}{2\eta}\,y^2 + c_1 y + c_2 = \sum_n b_n \cos((2n-1)\pi y/b)\,.$$

Koeficienta c_1 in c_2 določiš iz robnih pogojev

$$v\left(\pm\frac{a}{2}, y\right) = v\left(x, \pm\frac{b}{2}\right) = 0\,,$$

koeficiente b_n kosinusne Fourierove transformacije pa dobiš z integralom

$$b_n = \frac{2}{b}\int_{-b/2}^{b/2} v_{\mathrm{p}}(y)\cos((2n-1)\pi y/b)\mathrm{d}y\,.$$

Po podobnem postopku kot pri uvodu v nalogo pridemo do koeficienta za pravokotni presek

$$C = 2\pi\frac{b}{a}\left\{\frac{1}{3} - \frac{b}{a}\frac{64}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tanh\left(\frac{a}{b}\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)}{(2n-1)^5}\right\}\,.$$

Kaj pa, če se lotiš naloge z lastnimi funkcijami na pravokotniku

$$g_{mn}(x,y) = \sin(n\pi x/a)\sin(m\pi y/b)$$

in slediš postopku iz osnovne naloge?