8. naloga: Robni problem lastnih vrednosti

Pri robnem problemu lastnih vrednosti poznamo diferencialno enačbo in nekaj robnih pogojev (običajno vsaj toliko, kolikor je red enačbe). Za rešitev problema moramo v splošnem v enem zamahu določiti tako (lastne) funkcije, ki ustrezajo danim robnim pogojem, kot (lastne) vrednosti, ki skupaj zadoščajo diferencialni enačbi. Reševanje robnih problemov je zato lahko bistveno bolj zapleteno kot integracija začetnih problemov.
Gibanje napete strun z linearno gostoto $\rho[kg/m]$, ki le rahlo opleta okoli osi $x[m]$ je ob dodatni zunanji sili $F[N/m]$ in notranji vzdolžni sili (napetosti) $T[N]$ predpisana z enačbo

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + F(x,t)\,.$$

Tukaj se bomo osredotočili na lastna nihanja nehomogene strun na intervalu $x \in [0,a]$ podana z nastavkom $u(x,t) = u(x)\exp(\mathrm{i}\omega t)$. Na robovih intervala je struna fiksno vpeta: $u(0) = u(a) = 0$. Lastni nihajni načini so določeni z enačbo

$$-\omega^2\rho(x)u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)\,. \tag{1}$$

Dva tipična pristopa reševanja problema sta diferenčna metoda in strelska metoda:
Pri *diferenčni metodi* razdelimo interval na N točk ($x_n = n\,h$, $h = a/N$) in nadomestimo odvode na realni osi s končnimi diferencami na mreži točk. Spomnimo se aproksimacij za prvi odvod

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) &= \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)\\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h)\,,\end{aligned}$$

in drugi odvod

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + O(h^2)\,.$$

Ob diskretizaciji vseh količin $\{u,\rho,T\}_n = \{u,\rho,T\}_n(x_n)$ se enačba za lastna nihanja aproksimira z linearnem sistemom enačb

$$-(\omega h)^2\rho_n u_n = T_n(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}) + (T_{n+1}-T_{n-1})(u_{n+1}-u_{n-1})/4 \quad \text{za} \quad n \in [1, N-1]\,.$$

Z upoštevanjem robnih pogojev $u_0 = u_{N-1} = 0$ sistem enačb prepišemo v matrično obliko

$$\mathbf{A}.\mathbf{u} = (h\omega)^2\boldsymbol{\rho}.\mathbf{u} \quad \text{oz.} \quad \boldsymbol{\rho}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}.\boldsymbol{\rho}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{v} = (h\omega)^2\mathbf{v}\,,$$

pri čemer smo uvedli vektor odmikov $\mathbf{u} = (u)_{n=1}^{N-1}$ oziroma $\mathbf{v} = \rho^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u}$, diagonalno matriko gostote $\rho = \mathrm{diag}(\rho_n)_{n=1}^{N-1}$ in simetrično matriko $\mathbf{A}$ z vsemi informacijami o silah vzdolž strune in robnih pogojih. Dobljen problem lastnih vrednosti rešimo z numerično diagonalizacijo npr. z rutino `tqli` iz *Numerical recipes* ali `dstev` iz *LAPACK*.

Pri *strelski metodi* poskušamo s funkcijo $u(x)$ pri upoštevanju enačbe (1) povezati konca definicijskega območja tako, da zadovoljimo robnim pogojem. To storimo tako, da si izberemo energijo $E = \omega^2$ in začnemo integrirati (1) z recimo metodo RK4 iz točke $x = 0$ s začetnimi pogoji $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ v smeri $x = 1$. Vrednost E spreminjamo tako dolgo, dokler robni pogoj $u(1) = 0$ ni izpolnjen do zahtevane natančnosti. Tako najdemo eno lastno rešitev sistema. Na podoben način lahko najdemo še druge ob upoštevanju dejstva, da si rešitve v energijski skali sledijo po številu vozlov na intervalu. To pomeni, da rešitev z najnišjo energijo nima vozla na intervalu, rešitev s prvo višjo energijo pa ima en vozel itd.

Naloga: Določi nekaj najnižjih lastnih funkcij in lastnih vrednosti strune za nehomogeno gostoto

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0 & x \in [0, a/2] \\ \rho_1 & x \in (a/2, a] \end{cases}$$

in konstantno napetostjo vzdolštrune $T =$ konst.. Problem diskutiraj z obema predstavljenima metodama in primerjaj rešitve z analitičnimi izračuni (glej npr. Strnad, *Fizika II*). Nariši vse izračunane lastne vrednosti na en graf v odvisnosti of razmerja ρ_1/ρ_0. Kaj ima pri diferenčni metodi večjo vlogo pri napaki: končna natančnost diference, s katero aproksimiramo drugi odvod, ali zrnatost intervala (končna razsežnost matrike, ki jo diagonaliziramo)?

Dodatna naloga: Z diferenčno metodo si oglej še nihajne načine strune s konstantno napetostjo $T =$ konst. a naključno porazdelitvijo gostote, npr.

$$\rho_n = aN \frac{w_n}{\sum_{k=1}^{N-1} w_k}\,, \qquad w_n = \chi_n + 1\,,$$

za razlicne $a = 0, 1, 10, 100$, kjer je χ_n naključna spremenljivka enakomerno porazdeljana na $[0, 1]$. Poglej si obliko nihajnih načinov za različne N in nekaj po obliki izstopajočih nariši. Pri obravnavanih (a, N) izračunaj za lastne rešitve njihovo težiščě

$$M(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{N-1} n\, u_n^2$$

in razmazanost okoli težišča

$$S(\mathbf{u}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} n^2\, u_n^2 - M(\mathbf{u})^2}\,,$$

in jih prikazaži urejene po velikosti v odvisnosti od indeksa. Pb tem privzamemo, da je Evklidska norma vektorjev $\sum_{n=1}^{N-1} u_n^2 = 1$ enaka 1.