REŠITVE 3. IZPITA IZ UVODA V NUMERIČNE METODE-FIZIKI
23. april 2008

1. Preverite, da za integral

$$I_n(\alpha) = e^{-1} \int_0^1 x^{n+\alpha} e^x \, dx$$

velja rekurzivna relacija

$$I_n(\alpha) = 1 - (n+\alpha) I_{n-1}(\alpha).$$

Izračunajte $I_n(0)$ za $n = 16, 17, \ldots, 20$, če veste, da je $I_{15}(0) \approx 0.059$.
Rešitev: Rekurzivno relacijo preverimo z integracijo *per partes*:

$$\begin{aligned} e^{-1} \int_0^1 x^{n+\alpha} e^x \, dx &= e^{-1} \, x^{n+\alpha} \, e^x \, \big|_0^1 \\ - e^{-1}(n+\alpha) \int_0^1 x^{n-1+\alpha} \, e^x \, dx &= 1 - (n+\alpha) \, I_{n-1}(\alpha). \end{aligned}$$

Opazimo, da je zaporedje $\{I_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ padajoče in $\lim_{n\to\infty} I_n(0) = 0$. Obenem pa rešitev homogene diferenčne enačbe narašča po absolutni vrednosti. Torej lahko pri računanju "naprej" pričakujemo velike numerične napake, kar opazimo, če nekaj členov izračunamo neposredno po rekurziji. Težavam se izognemo tako, da računamo "nazaj". Postavimo $I_N(0) = 0$ za dovolj velik N in računamo $I_{n-1}(0) = (1 - I_n(0))/n$. Več kot dovolj je začeti z $N = 25$. Dobimo $I_{20}(0) = 0.046$, $I_{19}(0) = 0.048$, $I_{18}(0) = 0.050$, $I_{17}(0) = 0.053$, $I_{16}(0) = 0.056$ in $I_{15}(0) = 0.059$.

2. Poiščite tisto vrednost argumenta, pri katerem je dosežena največja vrednost funkcije $f(x) = x \sin x$ na intervalu $[0, 3]$. Rezultat naj bo točen na 3 decimalna mesta.
Rešitev: Funkcija f je na danem intervalu nenegativna. Hitro se prepričamo, da ima odvod $f'(x) = \sin x + x \cos x$ ničlo pri $x = 0$ in nekje na intervalu $(\pi/2, 3)$. Od tod nujno sledi, da je maksimum dosežen bodisi v ničli odvoda ali na desnem robu, torej pri $x = 3$ (levi rob ni v igri, saj $f(0) = 0$). Ničla odvoda zadošča enačbi $x = -\mathrm{tg}(x)$. Preoblikujemo jo v $x = -\mathrm{arctg} x + \pi$ in rešimo z navadno iteracijo z začetnim približkom $x_0 = 2$. Dobimo zaporedje približkov $x_1 = 2.034$, $x_2 = 2.028$, $x_3 = 2.029\ldots$ Ker je $f(3) < f(x_3)$, je maksimum torej dosežen pri $x = 2.029$.

3. Naj bo $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ neizrojena spodnje trikotna matrika. Napišite **učinkovit** algoritem za izračun matrike L^{-1}. Preštejte število potrebnih operacij (množenj in deljenj). Algoritem preizkusite na matriki

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rešitev: Naj bo $L^{-1} := [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n]$, $\boldsymbol{y}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Stolpce $\boldsymbol{y}_i$ določimo tako, da rešujemo sisteme enačb

$$L\,\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{e}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kjer je $\boldsymbol{e}_i$ i-ti enotski vektor, torej tak, ki ima povsod ničle, le na mestu i enico. Toda matrika L je spodnje trikotna, zato vsakega od sistemov rešimo z direktnim vstavljanjem. Brez upoštevanja posebne strukture desnih strani dobimo za vsak sistem $n(n+1)/2$ operacij, skupaj torej $n^2(n+1)/2$. Toda desne strani so vektorji, ki imajo na prvih $i-1$ mestih in na zadnjih $n-i$ mestih ničle. Zato se da število operacij zmanjšati. Ko namreč rešujemo konkretni sistem $L\,\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{e}_i$, takoj sledi, da je $y_1 = y_2 = \cdots = y_{i-1} = 0$. Vrednost y_i dobimo z enim deljenjem, ostale pa po klasičnem postopku direktnega vstavljanja, pri čemer za vsako komponento y_j, $j > i$, potrebujemo samo dve operaciji. Skupno število opracij za i-ti sistem je tako $1 + 2\,(n-i)$. Za vse sisteme skupaj pa

$$\sum_{i=1}^{n}(1 + 2\,(n-i)) = n + 2\,n^2 - n(n+1) = n^2.$$

Za konkretno matriko iz naloge dobimo

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Delec se giblje po krivulji $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))^T$. Ob času $t = 0$ je $\boldsymbol{r}(0) = (0,0)^T$ in $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (1,2)^T$. Z Eulerjevo metodo s korakom $\Delta t = 1/4$ poiščite položaj delca ob času $t = 1/2$, če za pospešek velja

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot{x}(t)\,y(t), x(t)^2\,\dot{y}(t))^T.$$

Rešitev: Diferencialno enačbo najprej prevedemo na sistem štirih prvega reda. Uvedemo nove spremelnjivke $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$, $z_3 = y$ in $z_4 = \dot{y}$. Če pišemo $\boldsymbol{Z} = (z_i)_{i=1}^4$, se začetni problem prepiše v

$$\dot{\boldsymbol{Z}}(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{Z}(t)) := (z_2(t), z_2(t)\,z_3(t), z_4(t), z_1(t)^2\,z_4(t))^T,$$

kjer je $z_1(0) = z_3(0) = 0$, $z_2(0) = 1$, $z_4(0) = 2$. Eulerjeva metoda je torej

$$\boldsymbol{Z}_{n+1} = \boldsymbol{Z}_n + \Delta t\,\boldsymbol{F}(t_n, \boldsymbol{Z}_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Na prvem koraku dobimo $\boldsymbol{Z}_1 = (1/4, 1, 1/2, 2)^T$, na drugem pa $\boldsymbol{Z}_2 = (1/2, 9/8, 1, 65/32)^T$. Zato je delec ob času $t = 1/2$ približno na koordinatah $(1/2, 1)^T$.