Numerične metode-fiziki, REŠITVE, 26.8.2013

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

1	2	3	4	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

Z razcepom Choleskega preverite, ali je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

simetrična pozitivno definitna.

Rešitev: Sledimo algoritmu razcepa Choleskega. Računamo torej spodnjo trikotno matriko V, da bo $A = V\,V^T$. Če se algoritem v realni aritmetiki konča, je to tudi dokaz, da je matrika simetrična pozitivno definitna. Dobimo

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Naloga 2 [25 točk]

Predlagajte iterativno metodo za izračun vrednosti $\sqrt[10]{10}$, ki ima kvadratično konvergenco. Z ustrezno izbranim začetnim približkom nato iskano vrednost izračunajte na štiri mesta natančno.
Rešitev: Vrednost $\sqrt[10]{10}$ je ničla funkcije $f(x) = x^{10} - 10$. Ker je ničla enostavna, bo Newtonova metoda konvergirala kvadratično. Za iteracijo torej lahko izberemo

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} = \frac{9\,x_r^{10} + 10}{10\,x_r^9}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Če izberemo $x_0 = 1.25$, dobimo $x_1 = 1.2592$, $x_2 = 1.2589$ in $x_3 = 1.2589$.

Naloga 3 [25 točk]

Funkcijo $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 3]$ aproksimirate z odsekoma linearno funkcijo ℓ_a tako, da je za neko izbrano vrednost $0 < a < 3$ graf funkcije ℓ_a na $[0, a]$ daljica med točkama $(0, f(0))$ in $(a, f(a))$, na $[a, 3]$ pa daljica med točkama $(a, f(a))$ in $(3, f(3))$.

a) Določite predpis za ℓ_a, če je $a = 1$.

b) Izračunajte

$$\min_{a\in(0,3)} \max_{0\le x\le 3} |f(x) - \ell_a(x)| \,.$$

Rešitev: Splošni predpis za ℓ_a je

$$\ell_a(x) = \begin{cases} a\,x, & 0 \le x \le a, \\ (a+3)(x-3)+9, & a < x \le 3. \end{cases}$$

Za izračun vrednosti

$$\min_{a\in(0,3)} \max_{0\le x\le 3} |f(x) - \ell_a(x)|$$

upoštevamo dejstvo, da na vsakem od intervalov $[0, a]$ in $[a, 3]$ interpoliramo f z linearno funkcijo. Napaka pri interpolaciji s premico se izraža kot

$$|f(x) - \ell_a(x)| = \left| \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-0)(x-a) \right|, \quad 0 \le x \le a,\ \xi_1 \in [0, a],$$
$$|f(x) - \ell_a(x)| = \left| \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-a)(x-3) \right|, \quad 0 \le x \le a,\ \xi_2 \in [a, 3],$$

Upoštevamo, da je $f''(\xi) \equiv 2$ ter

$$\max_{0\le x\le a} |x(x-a)| = a^2/4,$$
$$\max_{a\le x\le 3} |(x-a)(x-3)| = (3-a)^2/4.$$

Izračunati moramo torej

$$\min_{0<a<3} \left\{ a^2/4, (3-a)^2/4 \right\},$$

od koder dobimo $a = 3/2$ in

$$\min_{0<a<3} \left\{ a^2/4, (3-a)^2/4 \right\} = 9/16.$$

Naloga 4 [25 točk]

Krivulja $\boldsymbol{r} = (x, y, z) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ zadošča diferencialni enačbi

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \big(x(t)^2 - \dot{y}(t), \cos(x(t)) - z(t), \dot{x}(t) - x(t)\big)\,.$$

Z eksplicitno Eulerjevo metodo s korakom $\Delta t = 0.1$ izračunajte približek za $\|\dot{\boldsymbol{r}}(0.1)\|_2$, če je $\boldsymbol{r}(0) = (1, 1, 1)$ in $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (1, -1, 1/2)$.
Rešitev: Ker je $\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$, zgornjo diferencialno enačbo drugega reda prevedemo na sistem prvega reda z uvedbo spremenljivk $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y}$, $z_1 = z$, $z_2 = \dot{z}$. Tako dobimo sistem

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 - y_2, \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = \cos x_1 - z_1, \quad \dot{z}_1 = z_2 \quad \dot{z}_2 = x_2 - x_1,$$

oziroma v vektorski obliki

$$\dot{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{W}), \quad \boldsymbol{W} = (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2), \quad \boldsymbol{F} = (x_2, x_1^2 - y_2, y_2, \cos(x_1) - z_1, x_2, x_2 - x_1).$$

Upoštevamo $\boldsymbol{r}(0) = (x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$ in $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (x_2, y_2, z_2) = (1, -1, 1/2)$ in dobimo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_1 &= \boldsymbol{W}_0 + 0.1\,\boldsymbol{F}(0, \boldsymbol{W}_0) = (1, 1, 1, -1, 1, 1/2) + 0.1(1, 2, -1, \cos(1) - 1, 1/2, 0)\\ &= (1.1, 1.2, 0.9, -1.04597, 1.05, 0.5).\end{aligned}$$

Od tod $\dot{\boldsymbol{r}}(0.1) \approx (1.2, -1.04597, 0.5)$ in $\|\dot{\boldsymbol{r}}(0)\|_2 = 1.6685$.