REŠITVE 2. IZPITA IZ UVODA V NUMERIČNE METODE-FIZIKI
7. februar 2008

1. Numerično stabilno izračunajte vrednost izrazov

   a)
$$\frac{1}{x}\sqrt{e^{x^2}-1},$$

   b)
$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\sqrt{1-x+x^2},$$

   za $x = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}, \ldots$.
   Rešitev: Za majhne x pride v obeh formulah do odštevanja skoraj enakih števil, kar povzroči velike numerične napake. Prvo formulo s pomočjo Taylorjeve vrste preuredimo v

$$\frac{1}{x}\sqrt{e^{x^2}-1}=\sqrt{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}=\sqrt{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\ldots}.$$

   Za majhne x je več kot dovolj vzeti samo prve tri člene vrste pod korenom, saj za zgoraj navedene vrednosti x dobimo zaporedoma 1.00005, 1.00000, 1.00000 in 1.00000.
   Pri drugi formuli pa upoštevamo (za $x > 0$)

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\sqrt{1-x+x^2}=\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{x}\frac{2\,x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}.$$

   Za zgoraj navedene x pa tokrat dobimo 0.99996, 0.99999, 1.00000 in 1.00000.

2. Preverite, da ima funkcija

$$f(x)=e^{-2\,x}-x$$

   natanko eno ničlo $\alpha \in [0,1]$. Nato se prepričajte, da navadna iteracija

$$x_{r+1}=\frac{x_r\,(1-\log x_r)}{1+2\,x_r}, \quad r=0,1,\ldots,$$

   konvergira k ničli α z asimptotičnim redom konvergence vsaj 2 in jo poiščite na 4 decimalna mesta natančno.
   Rešitev: Ker je $f(0) = 1 > 0$ in $f(1) = e^{-2} - 1 < 0$, ima f na $[0, 1]$ vsaj eno ničlo. Po drugi strani pa je $f'(x) = -2\,e^{-2\,x} - 1 < 0$, kar pomeni, da je f monotono padajoča in zato ne more imeti več kot ene

ničle.
Naj bo α rešitev zgornje enačbe, torej

$$e^{-2\,\alpha} - \alpha = 0.$$

Z nekaj preoblikovanja dobimo

$$\log \alpha = -2\,\alpha, \tag{1}$$

kar bomo uporabili pri nadaljnjih računih. Označimo iterativno funkcijo z

$$g(x) = \frac{x\,(1 - \log x)}{1 + 2\,x}.$$

Red konvergence navadne iteracije je p, če je

i) $$g(\alpha) = \alpha,$$

ii) $$g^{(q)}(\alpha) = 0, \quad q = 1, 2, \ldots, p-1, \quad g^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Če upoštevamo (1), opazimo najprej, da je $g(\alpha) = \alpha$. Z nekaj računanja pridemo do odvodov funkcije g v α, namreč

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= -\frac{2\alpha + \log \alpha}{1 + 2\,\alpha)^2} = 0, \\ g''(\alpha) &= \frac{4\,\alpha\,(\alpha - 1) + 4\,\alpha\,\log \alpha - 1}{\alpha(1 + 2\,\alpha)^3} \neq 0. \end{aligned}$$

Red konvergence je torej 2.
Če za x_0 izberemo $x_0 = 0.4$, so zaporedni približki naslednji: $x_1 = 0.4258$, $x_2 = 0.4263$, $x_3 = 0.4263, \ldots$ Rešitev je torej $\alpha = 0.4263$.

3. Naj bo $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spodnje trikotna matrika z neničelnimi elementi na diagonali in $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Podrobno opišite **ekonomičen** algoritem za računanje vektorja

$$\boldsymbol{x} = L^T\,L^{-1}\,\boldsymbol{b}.$$

Preštejte točno število množenj in deljenj. Algoritem nato preverite na podatkih

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = (0, 0, 3)^T.$$

Rešitev: Računanje vektorja $\boldsymbol{x}$ razdelimo na dva dela: i) iskanje vektorja $\boldsymbol{y} = L^{-1}\,\boldsymbol{b}$ in ii) $\boldsymbol{x} = L^T\,\boldsymbol{y}$. Predvsem je nedopustno računati inverzno matriko L^{-1}. Namesto tega vektor $\boldsymbol{y}$ poiščemo kot rešitev sistema

$$L\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}.$$

Ker je L spodnje trikotna matrika, uporabimo direktno vstavljanje. Pri tem naredimo $n(n-1)/2$ množenj in n deljenj. Končni $\boldsymbol{x}$ dobimo sedaj z neposrednim matričnim množenjem $\boldsymbol{x} = L^T\,\boldsymbol{y}$. Ker je L^T zgornje trikotna matrika, nas to stane le $n(n+1)/2$ množenj. Skupaj torej $n^2 + n$ operacij.
Za posebni primer dobimo rešitev $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)^T$.

4. Iščete ničlo funkcije y, ki je dana kot rešitev začetnega problema

$$y''(t) + \sin(y(t)) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Za začetni približek ničle izberete $t_0 = 1$. Naslednji približek t_1 pa izračunate po Newtonovi metodi. Izračunajte t_1 tako, da za računanje vrednosti $y(t_0)$ in $y'(t_0)$ uporabite Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$.
Rešitev: Nov približek po Newtonovi metodi izračunamo takole

$$t_1 = t_0 - \frac{y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

Zato potrebujemo vrednosti $y(t_0)$ in $y'(t_0)$. Kot namiguje navodilo, bomo njuna približka dobili z Eulerjevo metodo za začetni problem drugega reda. Slednjega najprej spremenimo na sistem prvega reda z novo vektorsko neznanko $\boldsymbol{Y}(t) = (y(t), y'(t))^T$, od koder dobimo

$$\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{Y}(t)) := [\boldsymbol{Y}_2(t), -\sin(\boldsymbol{Y}_1(t))]^T, \quad \boldsymbol{Y}(0) = [1, 0]^T.$$

Pišimo $\boldsymbol{Z}(t) \approx \boldsymbol{Y}(t)$. Z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$ v dveh korakih dobimo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}(0.5) &= \boldsymbol{Y}(0) + h\,\boldsymbol{F}(0, \boldsymbol{Y}(0)) = [1, -0.420735]^T, \\ \boldsymbol{Z}(1) &= \boldsymbol{Z}(0.5) + h\,\boldsymbol{F}(0.5, \boldsymbol{Z}(0.5)) = [0.789632, -0.841471]^T. \end{aligned}$$

Torej je $y(t_0) = y(1) \approx 0.789632$ in $y'(t_0) = y'(1) \approx -0.841471$. Od tod $t_1 \approx 1.938395$.