REŠITVE 1. IZPITA IZ UVODA V NUMERIČNE METODE-FIZIKI
28. januar 2008

1. Preverite, da zaporedje $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ zadošča diferenčni enačbi

$$a_n = n\, a_{n-1} - \frac{1}{(n+2)}, \quad a_0 = 1/2.$$

Nato predlagajte, kako bi numerično natančno izračunali člene a_i, $i = 0, 1, \ldots, 20$.
Rešitev: Preprosti račun

$$n\, a_{n-1} - \frac{1}{n+2} = n\, \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = a_n$$

pokaže, da je zaporedje $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ rešitev podane diferenčne enačbe. Hitro se prepričamo, da neposredno računanje po rekurzivni formuli "naprej" ni dobro (odštevanje skoraj enakih števil), saj se napaka pri členih hitro povečuje. Zato rekurzijo zapišemo v obliki

$$a_{n-1} = \frac{1}{n}\left(a_n + \frac{1}{n+2}\right).$$

Za dovolj velik $N > 20$ izberemo na primer $a_N = 0$ in računamo po pravkar zapisani formuli "nazaj".

2. Iščete ničle funkcije $f(x) = x + 4 - e^{x^2}$. Preverite, da ima f vsaj po eno ničlo na intervalih $[-2, -1]$ in $[1, 2]$ (v resnici ima natanko eno na vsakem intervalu). Nato z neko metodo poiščite ničlo na vsakem od prej omenjenih intervalov na štiri decimalna mesta natančno. Za izbrano metodo zapišite prvi in zadnja dva približka.
Rešitev: Na omenjenih intervalih je res vsaj po ena ničla, saj je $f(-2)\, f(-1) < 0$ in $f(1)\, f(2) < 0$. Za iskanje manjše izberemo direktno iteracijo v obliki

$$x_{k+1} = -\sqrt{\log(x_k + 4)}.$$

Če je $x_0 = -1.5$, dobimo, $x_4 = -1.0414$ in $x_5 = -1.0415$. Za večjo ničlo iteracijo prepišemo v obliko

$$x_{k+1} = \sqrt{\log(x_k + 4)}.$$

Pri izbiri $x_0 = 1.5$ dobimo $x_3 = 1.2908$ in $x_4 = 1.2907$.

3. Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ poznate njen LU razcep, torej tako spodnje trikotno matriko L z enkami na diagonali in zgornje trikotno matriko U, da je $A = L\,U$. Podan je še vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Kako bi **učinkovito** izračunali

vektor $\left(A^T A\right)^{-1} \boldsymbol{b}$? Natančno preštejte število potrebnih množenj in deljenj. Predlagani postopek preverite na podatkih

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = (1,2,3)^T.$$

Rešitev: Ker je $A = L\,U$, je $A^T A = U^T L^T L\,U$. Računanje vektorja $\boldsymbol{x} = \left(A^T A\right)^{-1} \boldsymbol{b}$ je ekvivalentno reševanju sistema

$$\left(U^T L^T L\,U\right)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Opazimo, da ga lahko rešujemo na primer takole

$$\begin{aligned} U^T\,\boldsymbol{x_1} &= \boldsymbol{b}, \\ L^T\,\boldsymbol{x_2} &= \boldsymbol{x}_1, \\ L\,\boldsymbol{x_3} &= \boldsymbol{x}_2, \\ U\,\boldsymbol{x_3} &= \boldsymbol{x_3}, \end{aligned}$$

pri čemer je $\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}$. Imamo dve obratni in dve direktni vstavljanji. Če upoštevamo, da ima L enke na diagonali, dobimo

$$2\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n\,(n+1)}{2}\right) = 2\,n^2$$

množenj in deljenj.

4. Robni problem

$$y''(x) + y'(x)^2 - 4\,y + 2 = 0, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 2,$$

rešujete s strelsko metodo. Za reševanje začetnega problema

$$y''(x) + y'(x)^2 - 4\,y + 2 = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = \alpha,$$

uporabite Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$. Rešite začetni problem dvakrat, prvič z $\alpha_1 = -1$, drugič z $\alpha_2 = 1$. Predlagajte, kako bi na podlagi izračunanih vrednosti izbrali naslednji približek α_3.
Rešitev: Z uvedbo vektorske spremenljivke $\boldsymbol{Y} = (y, y')^T$, diferencialno enačbo drugega reda prevedemo na sistem prvega

$$\boldsymbol{Y}' = \left(\boldsymbol{Y}(2), 4\,\boldsymbol{Y}(1) - \boldsymbol{Y}(2)^2 - 2\right)^T,$$

Uporabimo Eulerjevo metodo

$$\boldsymbol{Y}_{k+1} = \boldsymbol{Y}_k + h\,\boldsymbol{F}(x_k, \boldsymbol{Y}_k),$$

pri čemer prvič vzamemo $\boldsymbol{Y}_0 = (1,-1)^T$, drugič pa $\widetilde{\boldsymbol{Y}}_0 = (1,1)^T$. Dobimo $\boldsymbol{Y}_2 = (0.25, -0.625)^T$ in $\widetilde{\boldsymbol{Y}}_2 = (2.25, 2.375)^T$. S sekantno metodo določimo α_3 takole

$$\alpha_3 = \alpha_1 + (2 - \boldsymbol{Y}_2(1))\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\widetilde{\boldsymbol{Y}}_2(1) - \boldsymbol{Y}_2(1)} = \frac{3}{4}.$$